Megmutatjuk, hogy van olyan monoton növő divergens a_n sorozat, amellyel az (1) szerint elkészített b_n értéke minden n-re ugyanannyi, mégpedig 1/2. A b_n sorozat ekkor nyilván konvergens, határértéke pedig 1/2.

Legyen az $a_1 = 2$, $n > 1$ és tegyük fel, hogy az a_n sorozat n-nél kisebb indexű elemeit már megadtuk a megfelelő módon, azaz $a_1 < a_2 < \ldots, < a_{n-1}$ és $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 1/2$. Vizsgáljuk meg, hogyan kell az a_n értékét megválasztanunk, hogy továbbra is fennálljon $b_n = 1/2$ és $a_n > a_{n-1}$.

Felhasználva, hogy $b_n = b_{n-1} \cdot \dfrac{2^{a_{n-1}} \cdot a_n}{2^{a_n}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2^{a_{n-1}} \cdot a_n}{2^{a_n}}$, $b_n = \dfrac{1}{2}$ pontosan akkor teljesül, ha

(2) $$2^{a_{n-1}} \cdot a_n = 2^{a_n}, \quad \text{azaz } a_n \text{ gyöke a}$$

(3) $$2^{a_{n-1}} \cdot x = 2^x \text{ egyenletnek.}$$

Ha most a (3) egyenletnek van 1-nél nagyobb gyöke, akkor ezek egyikét választva a_n-nek, (2) szerint $2^{a_n} > 2^{a_{n-1}}$, vagyis $a_n > a_{n-1}$, a sorozat monoton növő marad. Másfelől ugyancsak (2) szerint

(4) $$a_n - a_{n-1} = \log_2 a_n > \log_2 a_1 = 1,$$

az így definiált sorozat szomszédos elemei között tehát legalább 1 a különbség, az a_n sorozat ezért valóban divergens.

Mivel $2^{a_1} = 4$, definíciónk helyességéhez meg kell mutatnunk, hogy ha $\lambda \geqq 4$, akkor a

(3') $$\lambda x = 2^x$$

egyenletnek van 1-nél nagyobb gyöke.

Az $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$ függvény folytonos az $[1, +\infty)$ intervallumon, és ismeretes, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, következésképp az f függvény minden $f(1) = 2$-nél nagyobb értéket fölvesz az $[1, +\infty)$ intervallumban, így a $(3')$-beli λ-t is. (Megmutatható, hogy az f *szigorúan monoton növő* az $[1, +\infty)$ intervallumban, a $(3')$ egyenlet 1-nél nagyobb gyöke és így a (2) összefüggéssel meghatározott a_n sorozat egyértelmű.)

Az a_n sorozat tehát létezik és megfelel a követelményeknek.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy a feladat feltételei mellett a b_n sorozat határértékeként az 1/2 mellett minden $t > 0$ szám szóba jöhet. Ha ugyanis $t > 0$, akkor nyilván léteznek olyan $0 < a_1 < \ldots < a_k < 2$ számok, amelyekre $2t = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. Ezután az $a_{k+1} = 2$ választással

$$b_{k+1} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1}}{2^{a_{k+1}}} = t,$$

és ha most $n > k+1$-re a megoldásban szereplő a_n sorozatot választjuk, akkor továbbra is $b_n = b_{n-1} \cdot \dfrac{2^{a_{n-1}} \cdot a_n}{2^{a_n}} = b_{n-1}$, azaz $b_n = t$, ha $n \geqq k+1$, az így kapott a_n pedig továbbra is szigorúan monoton nő és divergens marad.

2. A 2514. feladatban azt kellett igazolni (a megoldást lásd az 1985. évi 10. szám 446–447. oldalán), hogy ha az a_n sorozatra a most kiróttakon kívül még az is teljesül, hogy a tagjai egész számok, akkor amennyiben a b_n sorozat konvergens, a határértéke csak nulla lehet!

A közölt megoldásban a $d_n = a_{n+1} - a_n$ sorozatról beláttuk, hogy a $+\infty$-hez tart, ami most is igaz. Akkor azonban ebből arra következtettünk, hogy egészekről lévén szó, $d_n - d_{n-1} \geqq 1$ *végtelen sok* n-re teljesül. A bizonyításhoz annyi is elég lett volna, hogy létezzék olyan $c > 0$ szám, hogy $d_n - d_{n-1} \geqq c$ végtelen sok n-re teljesüljön.

Nos, ezúttal éppen ez nem igaz; $d = \log_2 a_n$ tart ugyan a $+\infty$-hez, de lassan: megmutatjuk, hogy a $d_n - d_{n-1}$ különbségsorozatnak nincs pozitív alsó korlátja, ez a sorozat a 0-hoz tart. Mivel esetünkben $d_n - d_{n-1} = \log_2 \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ és a logaritmusfüggvény folytonos, elegendő, ha az $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ sorozat konvergens és a határértéke 1.

A (4) összefüggés szerint $a_n - a_{n-1} = \log_2 a_n$. Mindkét oldalon a_n-nel osztva kapjuk, hogy

(5) $$1 - \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\log_2 a_n}{a_n}.$$

Ismeretes, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_2 x}{x} = 0$, ahonnan $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = +\infty$ miatt az (5) jobb oldalán álló sorozat konvergens és a határértéke 0. Innen $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = 1$ következik, ami a bizonyítandó állítással ekvivalens.