Ha a poliéder lapja között öt vagy annál több oldalú sokszög is előfordulna, akkor a testnek legalább 6 lapja lenne. Ezért a lapok között csak háromszögek és négyszögek lehetnek. Jelölje e az élek számát, és legyen a háromszöglapok száma k. A négyszögeké ekkor $5-k$. A test éleit laponként összeszámolva az élek számának kétszeresét kapjuk, azaz

$$2e = 3k + 4(5-k), \quad \text{amiből} \quad k = 20 - 2e.$$

Ezért k páros, és mivel $k \leq 5$, csak $k = 0$, 2, 4 lehetséges.

A $k = 0$ eset nem ad megoldást. Nem létezik ugyanis olyan konvex poliéder, amelynek 5 négyszöglapja lenne. Ha ugyanis egy csúcsban 4 négyszöglap találkozna, az ötödiknek 8 élhez kellene csatlakoznia, ami lehetetlen. Ha viszont minden csúcsban csak 3 négyszöglap találkozna, akkor a csúcsokat laponként összeszámolva, a csúcsok száma $\frac{5 \cdot 4}{3}$ lenne, ami ugyancsak lehetetlen, hisz a kapott érték nem egész.

A $k = 2$ esetben két háromszög és három négyszög határolta testről van szó. Itt három négyszöglapnak nem lehet közös csúcsa, mert az élben csatlakozó két háromszöglap további négy éle nem illeszthető 6 darab négyszög-élhez. Így a két háromszöglap „szemben" fekszik. Ilyen test pl. a háromszög alapú hasáb, általában pedig a ferdén metszett 3 oldalú gúla.

A $k = 4$ esetben egy négyszöglap mindegyik oldalához egy háromszöglap csatlakozik. Ez a poliéder a négyszög alapú gúla.

Tehát kétféle ötlapú konvex poliéder létezik.

Megjegyzés. Több megoldó felhasználta a konvex poliéderekre érvényes Euler-tételt, amely szerint $l + c = e + 2$, ahol l a lapok, c a csúcsok, e pedig az élek száma. Ez most azt adja, hogy $c = e - 3$. Mivel minden csúcsból legalább három él indul, $3c \leq 2e$, azaz $c \leq \frac{2e}{3}$. E két összefüggésből $\frac{2e}{3} \geq e - 3$, és így $e \leq 9$. Tekintve, hogy a csúcsok száma legalább 5, hiszen az egyetlen 4 csúcsú test nyilván a tetraéder, az is következik, hogy $e \geq 8$. Tehát két eset lehetséges: $e = 8$ vagy pedig $e = 9$. A megoldás most már a fentihez hasonlóan fejezhető be.

Ilyen módon vizsgálható meg az is, hogy hányféle *hat*lapú konvex poliéder van. Az a válasz, hogy *hét*féle.

Ismeretes a feladat megoldása 7, 8 és 9 lapú poliéderekre is, de 9-nél több lap esetére nem.