I. megoldás. Megmutatjuk, hogy létezik olyan *mértani* sorozat, amelyre teljesül (1). Keressük tehát a_n-et $a_1 \cdot q^{n-1}$ alakban, ahol $a_1 > 0$ és $q > 0$. Az (1) összefüggés szerint kapjuk, hogy ha $n \geq 1$, akkor

$$a_1 \cdot q^{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} - a_1 \cdot q^n, \qquad (2)$$

$$\text{ahonnan} \quad q^2 = 1 - q.$$

Ennek az egyenletnek a pozitív megoldása $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ha most $a_1 > 0$ tetszőleges, akkor az $a_n = a_1 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}$ sorozat minden tagja pozitív, és mivel lépéseink megfordíthatók, a sorozatra teljesül (2) és (1) is.

II. megoldás. Az alábbiakban azt is belátjuk, hogy a feladatnak *nincs* más megoldása, vagyis ha egy pozitív tagú a_n sorozatra teljesül (1), akkor az a_n szükségképpen mértani sorozat. Vizsgáljuk ehhez az a_n sorozat szomszédos elemeinek hányadosait, azaz legyen $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ekkor $b_n > 0$ és (1) szerint

$$b_{n+1} = \frac{1}{b_n} - 1 \quad \text{minden} \quad n \geq 1 \qquad \text{egészre.} \qquad (3)$$

Mivel b_{n+1} is pozitív, (3)-ból kapjuk, hogy $b_n < 1$, azaz minden $n \geq 1$-re

$$0 < b_n < 1. \qquad (4)$$

Ez b_{n+1}-re is igaz, vagyis $0 < \frac{1}{b_n} - 1 < 1$, ahonnan

$$\frac{1}{2} < b_n < 1,$$

és innen újra b_{n+1} (3)-beli alakját beírva $\frac{1}{2} < \frac{1}{b_n} - 1 < 1$, ahonnan

$$\frac{1}{2} < b_n < \frac{2}{3} \quad \text{minden} \quad n-re. \qquad (5)$$

Látható, hogy a b_n értékeire kapott újabb korlátok $\left(\frac{1}{2} \text{ és } \frac{2}{3}\right)$ jobbak a korábbiaknál (0 és 1). A gondolatmenetet megismételve további javulás várható – nézzük meg ezért ezt a lépést általában.

Legyen tehát $0 \leq u_k < b_n < v_k \leq 1$ minden n-re, azaz u_k és v_k a k-adik lépésben kapott korlátok ($u_1 = 0$, $v_1 = 1$). A (4)-től (5)-ig vezető lépéseket elvégezve most azt kapjuk, hogy minden n-re

$$u_{k+1} = \frac{1+u_k}{2+u_k} < b_n < \frac{1+v_k}{2+v_k} = v_{k+1}.$$

A k-ra vonatkozó teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy a $(k+1)$-edik lépésben kapott újabb korlátok, u_{k+1} és v_{k+1} valóban jobbak az előzőknél, azaz $u_k < u_{k+1}$ és $v_{k+1} < v_k$.

Ha ugyanis $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ és x_0 jelöli az $f(x) = x$ egyenlet pozitív megoldását – $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – akkor az indukciós bizonyításokban arra van szükség, hogy ha $0 < x < x_0$, akkor $x < f(x) < x_0$, illetve ha $x_0 < x$, akkor $f(x) < x$, hiszen $u_{k+1} = f(u_k)$ és $v_{k+1} = f(v_k)$. Az utóbbi állítások pedig leolvashatók az $f(x)$ és az x függvények grafikonjáról (lásd az ábrát).

1986-11-370-1.eps

Másfelől

$$0 < v_{k+1} - u_{k+1} = \frac{v_k - u_k}{(2+v_k)(2+u_k)} < \frac{1}{4}(v_k - u_k),$$

ahonnan

$$0 < v_k - u_k < \frac{1}{4^{k-1}}, \quad \text{hiszen} \quad v_1 - u_1 = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy az $[u_k, v_k]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumok hossza 0-hoz tart, így ha minden n-re $b_n \in [u_k, v_k]$ minden k-ra, akkor b_n *állandó*, az a_n tehát *mértani sorozat.* Hányadosát q-val jelölve $q = b_n = \lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} v_k$.

Mivel u_k konvergens, ezért u_{k+1} is az és

$$q=\lim_{k\to\infty} u_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+u_k}{2+u_k}=\frac{1+\lim\limits_{k\to\infty} u_k}{2+\lim\limits_{k\to\infty} u_k}=\frac{1+q}{2+q},$$

ahonnan q-ra az első megoldásban kapott $q^2+q-1=0$ egyenlet adódik. Ennek pozitív gyökével mint hányadossal és tetszőleges pozitív kezdőértékkel elkészített mértani sorozatok adják a feladat összes megoldását.

Megjegyzések. **1.** Ha felírjuk az u_k és v_k sorozatok néhány elemét, akkor az alábbi törteket kapjuk:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{8}{13},\ \frac{21}{34},\ \ldots,\ \text{illetve}$$
$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{13}{21},\ \frac{34}{55},\ \ldots$$

Látható, hogy a $\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow$ séma szerint haladva mindkét esetben a Fibonacci-féle sorozatot kapjuk, amelynek elemeire fennáll az $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ összefüggés. Ha $f_0=0$, akkor

$$u_k=\frac{f_{2(k-1)}}{f_{2k-1}},\quad v_k=\frac{f_{2k-1}}{f_{2k}},\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

A második megoldás állítása most már adódik abból az ismert tényből, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosa, f_n/f_{n+1} a $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ értékhez tart; a páros n-ekhez tartozó részsorozat monoton növekedően, páratlan n-ekre pedig monoton fogyóan.

2. Az (1) összefüggés szerint az a_n sorozat minden egyes eleme a megelőző kettő segítségével számítható ki: a sorozatot egy úgynevezett *rekurzió* adja meg. Ha nem írnánk elő, hogy a sorozat elemei pozitív számok, akkor az első két elemet, a_1-et és a_2-t tetszés szerint megválasztva a további elemek (1) alapján számolhatók. A második megoldásból kiderül, hogy ha $a_1:a_2\neq(\sqrt{5}-1)/2$, akkor az így elkészített sorozatnak nem lehet minden eleme pozitív.

A sorozatok ilyen módon történő megadása igen gyakori: a számtani sorozatot például az $a_{n+1}=a_n+d$, a mértani sorozatot az $a_{n+1}=a_n\cdot q$, a fentiekben is előkerült Fibonacci-sorozatot pedig az $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ összefüggés adja meg. Az ilyen módon megadott sorozatok bizonyos tulajdonságai a rekurzív összefüggésből is leolvashatók, ám gyakran szükség van az n-edik elemet közvetlenül megadó *explicit* összefüggésre. A számtani sorozat esetén ilyen az $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, a mértani sorozatra az $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, az általános Fibonacci-sorozatra pedig az első pillanatra meghökkentő

$$a_n=A\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Ilyen explicit formula felírására nincsen általános módszer, azonban a rekurziók egy jól jellemezhető osztályára ismeretes a probléma megoldása. A feladatban szereplő $a_{n+2}=a_n-a_{n+1}$ rekurzió pedig ebbe az osztályba tartozik.

Az ilyen rekurziók általános alakja: $a_{n+2}=c_1\cdot a_{n+1}+c_2\cdot a_n$, ahol c_1 és c_2 adott konstansok. Esetünkben $c_1=-1$, $c_2=1$. (Ha $c_1=c_2=1$, akkor éppen a Fibonacci-sorozathoz jutunk.)

Az általános megoldás a $q^2=c_1\cdot q+c_2$ egyenlet – a rekurzió úgynevezett *karakterisztikus egyenlete* – gyökeinek, a q_1-nek és a q_2-nek a segítségével írható fel (q_1 és q_2 komplex számok is lehetnek):

$$\begin{aligned}&\text{ha}\quad q_1\neq q_2,\quad \text{akkor}\quad a_n=A\cdot q_1^{n-1}+B\cdot q_2^{n-1};\\&\text{ha}\quad q_1=q_2,\quad \text{akkor}\quad a_n=A\cdot q_1^{n-1}+B\cdot n\cdot q_1^{n-1}\end{aligned}$$

alakú az általános megoldás.

Az A és a B itt tetszőlegesen választott konstansok; amennyiben a rekurzív összefüggés mellett a sorozat első két elemét is megadjuk és ezzel egyértelműen meghatározzuk a sorozatot, akkor A és B a sorozat első két elemére is érvényes formulákból adódó kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai.

A fenti állítás bizonyítása – és némi általánosítása – megtalálható például *N. I. Vilenkin: Kombinatorika* című könyvének (Műszaki Könyvkiadó, 1971) 168–174. oldalán.

Esetünkben a karakterisztikus egyenlet, $q^2=1-q$ gyökei

$$q_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad q_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Az általános eredmény szerint tehát az (1) rekurzió összes megoldása

$$A\cdot q_1^{n-1}+B\cdot q_2^{n-1}\quad\text{alakú.}$$

Mivel $|q_1|<1$, ezért az összeg első tagja, $A\cdot q_1^{n-1}$ a 0-hoz tart; másfelől $q_2<-1$ miatt $B\neq 0$ esetben a második tag nem korlátos sem alulról, sem pedig felülről. Ez azt jelenti, hogy ha $B\neq 0$, akkor a sorozatnak nem lehet minden eleme pozitív.