Végezzük el (2)-ben a négyzetre emeléseket, rendezzük az egyenletet, és osszunk 2-vel:

(2') $$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 34.$$

Emeljük négyzetre (1)-et:

(1') $$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1.$$

és ha most (1')-ből kivonjuk (2')-t, és osztunk 3-mal, akkor az

(4) $$xy + xz + yz = -11$$

egyenlethez jutunk.

Ha (3)-ban is elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor rendezés után kapjuk, hogy

$$(xy + xz + yz)(x + y + z) - 9xyz = 16.$$

Az utolsó sorban (4) és (1) alapján tudjuk, hogy a kisebbítendő -11, ezt beírva és rendezve az

(5) $$xyz = -3$$

egyenletet kapjuk.

Ha tehát x, y, z megoldása a feladat egyenletrendszerének, akkor erre a három számra teljesül az

(1) $$x + y + z = 1$$
(4) $$xy + yz + xz = -11$$
(5) $$xyz = -3$$

egyenletrendszer is. A továbbiakban ezt az egyenletrendszert oldjuk meg.

A gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján most már felírható olyan harmadfokú egyenlet, amelynek x, y és z a gyökei, hiszen

$$(u - x)(u - y)(u - z) = u^3 - (x + y + z)u^2 + (xy + yz + zx)u - xyz.$$

Az együtthatók értékét behelyettesítve az

(6) $$u^3 - u^2 - 11\,u + 3 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ha x, y és z megoldása az (1), (2), (3) egyenletrendszernek, akkor ez a három szám – valamilyen sorrendben – a (6) egyenletnek is gyöke.

Bár a harmadfokú egyenlet megoldására létezik általános módszer, itt gyorsabban célhoz érünk, ha felhasználjuk azt az ismert tényt, hogy *egész* együtthatós polinom *racionális* gyökei *véges sok* lépésben megkaphatók: számlálójuk a polinom konstans tagjának, nevezőjük pedig a legmagasabb fokú tagnak az osztója. Esetünkben u^2 együtthatója 1, így (6) racionális gyökei egészek, és az $1, -1, 3, -3$ halmazból valók.

Behelyettesítve a -3 valóban gyök, így az $(u + 3)$ gyöktényező kiemelhető:

$$u^3 - u^2 - 11\,u + 3 = (u + 3)(u^2 - 4\,u + 1).$$

A második tényező másodfokú, gyökei $2 + \sqrt{3}$ és $2 - \sqrt{3}$.

Azt kaptuk, hogy ha x, y, z megoldása a feladat egyenletrendszerének, akkor x, y, z értéke (valamilyen sorrendben) -3, $2 + \sqrt{3}$ és $2 - \sqrt{3}$.

Ellenőrizve pl. az $x = -3$, $y = 2 + \sqrt{3}$, $z = 2 - \sqrt{3}$ értékhármast, ez valóban megoldása az egyenletrendszernek. Mivel az egyenletrendszer, x, y, z-ben szimmetrikus, e három érték tetszőleges permutációja megoldás, így összesen $3! = 6$ megoldás van. Táblázatba foglalva az egyenletrendszer megoldása:

x	-3	-3	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
y	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	-3	-3	$2+\sqrt{3}$
z	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	-3	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	-3