A feltételeknek megfelelő tetszőleges $x,\ y,\ z$ számhármas esetén jelölje t a három szám közül nagyság szerint a középsőt (egyenlőség lehetséges). A másik kettő összege ekkor $1-t$, és mivel egyikük sem nagyobb a másik kétszeresénél, a különbségük legfeljebb $\frac{1-t}{3}$ lehet. Felhasználva az $u \cdot v = \frac{(u+v)^2-(u-v)^2}{4}$ azonosságot, a két „szélső” szám szorzata nagyobb vagy egyenlő, mint

$$\frac{(1-t)^2-\left(\frac{1-t}{3}\right)^2}{4}=\frac{2}{9}(1-t)^2.$$

A három szám szorzata eszerint biztosan nem kisebb, mint $\frac{2}{9}t(1-t)^2$.

Vizsgáljuk meg, milyen határok közé eshet t, a három szám közül a középső. Mivel a legnagyobb szám legfeljebb $2t$ és legalább t, a legkisebb pedig legfeljebb t és legalább $\frac{t}{2}$, ezért

$$2t+t+t \geq\ x+y+z \geq\ t+t+\frac{1}{2}, \quad \text{ahonnan}$$
$$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{2}{5}.$$

Azt kaptuk, hogy minden, a feltételeknek megfelelő $x,\ y,\ z$ számhármasra van olyan $t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{2}{5}\right]$, hogy $xyz \geq\ f(t) = 2/9 \cdot t(1-t)^2$. A három szám szorzata tehát biztosan nem kisebb, mint az f függvény minimuma az $\left[\frac{1}{4}; \ \frac{2}{5}\right]$ intervallumon, ez utóbbi pedig létezik, hisz az f folytonos. Az is igaz, hogy tetszőleges $t \in \left[\frac{1}{4}; \ \frac{2}{5}\right]$ esetén az $\frac{1-t}{3},\ t,\ \frac{2}{3}(1-t)$ számok összege 1, egyikük sem nagyobb a másik kétszeresénél, szorzatuk pedig éppen $f(t)$-vel egyenlő. Így az adott xyz szorzatoknak is létezik a minimuma, és az éppen az f minimumával egyenlő a megadott intervallumon.

1986-12-436-1.eps

Az f függvény *konkáv* az $\left[\frac{1}{4}; \ \frac{2}{5}\right]$ intervallumban, hiszen a második deriváltja, $f''(t) = -\frac{2}{9}(4-6t)$ itt negatív, ezért f az $\left[\frac{1}{4}; \ \frac{2}{5}\right]$ -beli minimumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel.

Behelyettesítve $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32} < \frac{4}{125} = f\left(\frac{2}{5}\right)$, így a függvény minimuma az $\frac{1}{4}$ helyen van. A három szám szorzata tehát legalább $\frac{1}{32}$, és akkor pontosan ennyi, ha a számok rendre $\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{2}$.