

Látni fogjuk, hogy a feladat b) és c) állítása csak az  $f > e (> 0)$  nagyságviszony mellett érvényes.

1986-11-365-1.eps

1. ábra

Legyen  $B$  és  $C$  vetülete  $AD$ -re  $B_0$ , ill.  $C_0$ , a  $C$  csúcs vetülete az  $ABD$  síkra  $C'$ , és  $B$  vetülete a  $C_0C'$  egyenesre  $B_1$  (1. ábra). Az  $ADB$  és  $DAC$  lapháromszögek egybevágók, mert ezen körüljárásaik szerinti első oldalpárjuk közös, a további kettő pedig a feltevés szerint egyenlő. Emiatt  $BB_0$ ,  $CC_0$  magasságaik is egyenlők.

Az adott  $CC_0C' \sphericalangle = 60^\circ$  alapján a  $CC_0C'$  derékszögű háromszögből

$$C'C_0 = \frac{CC_0}{2} = \frac{BB_0}{2} = \frac{B_1C_0}{2},$$

hiszen  $C'C_0$  merőleges  $AD$ -re és  $BB_1$ -re, tehát  $BB_1 \parallel AD$ . Eszerint  $C'$  felezi a  $B_1C_0$  szakaszt, továbbá a  $CC_0B_1$  háromszög egyenlő oldalú.

Másrészt  $C$  benne van a  $B_1C_0$  szakasz felező merőleges síkjában, ez pedig azonos a  $BB_0$  szakasz felező merőleges síkjával, tehát az adatok szerint

$$(1) \quad B_0C = BC = e = DC.$$

1. Ha mármost  $e = AB < DB = f$ , akkor a közös befogójú  $BB_0A$  és  $BB_0D$  háromszögekből  $B_0A < B_0D$ , tehát  $B_0DC$  valódi háromszög és egyenlő szárú. Ebben a  $B_0D$  alapon fekvő szögek hegyesszögek, egyszersmind  $BAD \sphericalangle$  is hegyesszög. Így  $C_0$ ,  $B_0$  az  $AD$  északaszon vannak és harmadolják azt. Jelöljük  $AD$  hosszát  $3g$ -vel, ekkor az  $ADC$  háromszögből

$$g = DC_0 = DC \cdot \cos CDA \sphericalangle = \frac{AD^2 - AC^2 + CD^2}{2 \cdot DA} = \frac{9g^2 - (f^2 - e^2)}{6g},$$

és  $AD$  keresett kifejezése:

$$AD^2 = 9g^2 = 3(f^2 - e^2),$$

ami a most vizsgált esetben pozitív. Hozzátesszük, hogy mivel az  $AD^2 = (f + e)(3f - 3e)$  felbontás első tényezője az  $ADB$  háromszög révén nagyobb, mint  $AD$ , azért a második tényezőre  $AD < 3f - 3e$ , és az  $f + e > 3f - 3e$  egyenlőtlenségből  $2e > f$  feltétele annak, hogy a háromszög létrejöhesse. Ugyanez az egybevágó  $BCA$  és  $BCD$  lapokból is kiadódik.

2. Ha viszont  $e = AB > DB = f$ , akkor  $AB_0 > DB_0 = AC_0$ . Így  $B_0$  a  $C_0D$  félegyenesen van, másrészt (1) szerint  $C$ -től ugyanannyira, mint  $D$ , tehát  $B_0$  azonos  $D$ -vel. Ezért az  $ADB \sphericalangle = DAC \sphericalangle$  derékszög, tehát ekkor  $AD^2 = AB^2 - BD^2 = e^2 - f^2$  (2. ábra). Ide kapcsoljuk mindjárt, hogy  $e = f$  nem lehetséges. Akkor ugyanis  $C_0$  egybeesnék  $B_0$ -l, és  $B_1$  a  $B$ -vel, így – hacsak  $AD > 0$  –,  $BB_0 = CB_0 < BA = e = BC$  lenne, és a  $BB_0C \sphericalangle$  nem lehetne  $60^\circ$ -os.

1986-11-366-1.eps

2. ábra

Láttuk, hogy az 1. nagyságviszony mellett  $C_0$  felezi a  $B_0D$  szakaszt, és  $C_0C' \parallel B_0B$ , így  $C_0C' = B_0B/2$  éppen középvonala a  $BB_0D$  háromszögnek, tehát  $C'$  rajta van a  $BD$  élen (felezi azt). Így a  $BCD$  lap tartalmazza az  $ABD$ -re merőleges  $CC'$  egyenest, tehát maga is merőleges az  $ABD$  lapsíkra, ahogy a feladat állítja.

Ugyanez a tény az  $AC = f$  élen metsződő lappárra abból adódik, hogy a testnek van olyan forgástengelye, amely körüli  $180^\circ$ -os elfordítással önmagába megy át. Ez a tengely az  $AD$  szakasz  $F$  felezőpontján megy át, merőleges az élre és benne van a  $B(AD)C$  lapszöget felező síkban. Könnyen adódik az előzőkből, hogy a tengely a  $BC$  élt is felezi. Így az  $A$  és  $D$ , valamint a  $B$  és  $C$  csúcspárok egymás helyére fordulnak, és a  $BD$  élnél levő derékszögű lapszög az  $AC$  élnél levő lapszögbe megy át, az is derékszög.

(Az  $e > f$  nagyságviszony esetében  $C'$  nincs rajta a  $BD$  szakaszon, előbbi érvelésünk alapja kiesik, nincs derékszög az  $f$ -élekben összefutó lappárok között. A forgástengely azonban ekkor is megvan.)

Rátérünk a c) állításra, de már csak az  $e < f$  esetben. Az első alkalmas metsző sík a  $CC_0C'$ , merőleges az  $AD$  élre. A  $DCC_0C'$  tetraédert a  $CC'$  tengely körül  $180^\circ$ -kal elfordítva  $D$  a  $B$ -be jut és  $C_0$  a  $B_1$  pontba, a  $CC_0C'$  síkmetszet helyben marad és elfordul példányai együtt a  $CC_0B_1$  szabályos háromszöget alkotják. A második síkmetszet pedig az a  $BB_0B'$ , amelybe az első metszet az említett szimmetriával átmegy, tehát szintén merőleges  $AD$ -re,  $B'$  az  $AC$  él felezőpontja. Létrejön a  $BB_0G$  szabályos háromszög, egybevágó a  $CC_0B_1$ -gyel, és avval párhuzamos síkban fekszik, ezek az állítás szerinti hasáb alaplapjai; az oldalélek pedig  $B_0C_0$ ,  $BB_1$  és  $GC$ .

*Megjegyzések.* 1. A vizsgált típusú tetraéderek ( $e < f$  esetén) könnyű példát nyújtanak testátदारabolásra. Bolyai Farkas tétele szerint bármely két egyenlő területű, egyenes vonalú síkidom véges sok lépésben átदारabolható egymásba, ezzel szemben a térben általában nem lehetséges ez két egyező térfogatú, síklapokkal határolt test között, csak bizonyos szoros feltételek mellett.

2. A térszemlélet gyakorlásául hozzáfűzzük: az  $ADB$  és  $DAC$  lapok a testtel együtt átmennek egymásba, tehát egyező körüljárásúan egybevágók, ha a testre mindkétyszer kívülről nézünk rá. Az 1. ábrán viszont  $ADB$  és  $DAC$  ellentétes körüljárásúak. Ez abból adódik, hogy ott a  $DAC$  lapra kívülről nézünk rá, míg az  $ABD$  lapra a test belseje felől.