I. megoldás. Legyen a kör középpontja O, a harmadoló pontok a köríven C és D, az OC, OD egyenes és az AB egyenes metszéspontja pedig rendre $E,\ F$.

Az $ABCD$ és az $EFCD$ négyszög szimmetrikus az AB húr felező merőlegesére, ezért EF és CD párhuzamosak (mindkét szakasz merőleges a szimmetriatengelyre), ezenkívül $EA = BF = AB$, mert a feladat feltétele szerint $EA + BF + AB = 3AB$. A DOC és FOE háromszögek így nyilván hasonlóak; a következőkben meghatározzuk ennek a hasonlóságnak az arányát.

1986-10-301-1.eps

1. ábra

A körbe írt AOD, DOC, COB egyenlő szárú háromszögekben a szárszögek egyenlőek, mert D és C harmadolópontok, így a három háromszög egybevágó. Emiatt $AD = DC = CB$ és $ADO\sphericalangle = ODC\sphericalangle = OFA\sphericalangle$. A DAF háromszög tehát egyenlő szárú: $AF = AD$. Az $AFCD$ négyszög tehát rombusz, továbbá a DOC és FOE háromszögek hasonlóságának aránya innen

$$DC : FE = AF : FE = 2AB : 3AB = 2 : 3.$$

Ennek alapján már megszerkeszthető egy megfelelő $A,\ B$ pontpár. Az O középpontú, r sugarú k körön tetszőlegesen kijelöljük a D pontot. Az F pont a DO egyenes és az O középpontú $\frac{3}{2}r$ sugarú kör O-n túli metszéspontja. Az A és C pontokat a DF felező merőlegesének és a k körnek a metszéspontjaiként kapjuk, hiszen egy négyszög pontosan akkor rombusz, ha átlói merőlegesen felezik egymást. Mivel DF átmérő, ezért valóban rombuszt kapunk. Végül a B pont a k kör és az AF egyenes metszéspontja.

A fenti okoskodás megfordításával belátható, hogy a kapott $A,\ B$ pontpár kielégíti a feladat feltételeit.

II. megoldás. 1. Jelöljük a keresett AB ívhez tartozó kisebbik középponti szöget $AOB\sphericalangle = 6x$-szel – ahol tehát $0^\circ < 6x < 180^\circ$ –, ebből számítás alapján adunk jellemzést A-ra, B-re. Az I. megoldás jelöléseit használjuk, legyen még AB felezőpontja M. Így OM az ábra szimmetriatengelye, M az EF szakaszt is felezi, F a B-nek 3-szoros nagyítása az M centrumból.

A nagyobbik AOB szög mértékszáma $360^\circ - 6x$, ennek harmada $AOD\sphericalangle = 120^\circ - 2x$, így $MOD\sphericalangle = 3x + (120^\circ - 2x) = 120^\circ + x$, és ennek kiegészítő szöge $MOF\sphericalangle = 60^\circ - x$, hegyesszög. Az $EF = 3AB$ követelményből

$MF = 3MB$, azaz $\operatorname{tg}(60^\circ - x) = 3\operatorname{tg}(3x)$, és ismert azonosságok alapján

$$\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = \frac{3\operatorname{tg} x(3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x},$$

majd szorzattá alakításokkal, $\operatorname{tg} x = u$ jelöléssel

$$\frac{\sqrt{3} - u}{1 + \sqrt{3}\,u} = \frac{3u(\sqrt{3} + u)}{1 - \sqrt{3}u} \cdot \frac{\sqrt{3} - u}{1 + \sqrt{3}u}.$$

A föltevés szerint $0^\circ < x < 30^\circ$, $0 < u < 1/\sqrt{3}$, így a bal oldali kifejezés, ami egyben a jobb oldal második tényezője is, pozitív szám. Ezért a jobb oldal első tényezője 1-gyel egyenlő. Ebből u-ra a következő egyenlet adódik:

$$3u^2 + 4\sqrt{3}u - 1 = 0,$$

ennek egyetlen pozitív gyöke pedig

$$u = \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

2. Bár ezzel már meghatároztuk az $AOB\sphericalangle = 6x$ szöget, mégis – a kérdés egyszerűségére tekintettel – szívesen látnánk az A, B pontoknak körzővel és vonalzóval való megszerkesztését is. Ez (1) alapján lehetséges ugyan, de meglehetősen hosszadalmas, helyette rövidebb úton először az OMF háromszöghöz hasonlót szerkesztünk.

Föntebbi számításunk szerint

$$\operatorname{tg} MFO\sphericalangle = \operatorname{tg}(30^\circ + x) =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{3}}}{1 - \dfrac{\sqrt{5} - 2}{3}} = \ldots = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

1986-10-302-1.eps

2. ábra

Legyen egy egyenesen $UM=3$ egység, és folytatva $MV=5$ egység, messe az UV átmérőjű kört az M-ben UV-re emelt merőleges W-ben, ekkor tüstént

$$\operatorname{tg} MVW\sphericalangle = $$
$$= \frac{MW}{MV} = \frac{\sqrt{3\cdot 5}}{5} = \operatorname{tg} MFO\sphericalangle,$$

tehát az MVW háromszög hasonló az 1. ábra MFO háromszögéhez. Most már az M-en átmenő, az UV-től különböző félegyenesre fölmérve az $MS=1$, $MT=3$ szakaszokat, az S-en átmenő és TV-vel párhuzamos egyenessel kimetsszük az MV szakasz H harmadoló pontját. W körül megrajzoljuk az adott körrel egyenlő sugarú kört, ebből WH kimetszi B-t, és ezen át UV-vel párhuzamost húzva kapjuk A-t.

B. T.

Megjegyzések. 1. Az (1)-nél egyszerűbb szerkesztések olvashatók ki a következőkből is:

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{\frac{5}{27}},\quad \sin 3x = \sqrt{\frac{5}{32}},\quad \cos 3x = \sqrt{\frac{27}{32}},$$

de $5+27$ átmérőjű félkört kellene használnunk.

2. A két megoldás eredményeit azonosíthatjuk azáltal, hogy kiszámítjuk az I. megoldásból $\operatorname{tg} MFO\sphericalangle = AN/NF$ értékét, ahol N az AC szakasz felezőpontja.