I. megoldás. Legyen a rögzített K kör sugara R, középpontja O, ennek és F-nek közös vetülete e-re M, az MF szakasz hossza pedig legyen f. Jelölje egy tetszőleges vizsgálandó k kör sugarát r, középpontját O_1, ennek vetületét az MF egyenesre O_f, végül a k kör F-ből húzott egyik érintőjének érintési pontját E (1. ábra).

1986-10-299-1.eps

1. ábra

Pitagorasz tételét többször alkalmazva

$$FE^2 = FO_1^2 - O_1E^2 = (FO_f^2 + O_fO_1^2) - r^2 = FO_f^2 + (OO_1^2 - OO_f^2) - r^2.$$

Tekintsük az MF egyenesen az M, O, F és O_f pontok lehetséges elhelyezkedését (2/a, b ábrák)!

1986-10-300-1.eps

2.a ábra

1986-10-300-2.eps

2.b ábra

Mivel F és O_1 az e egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, ezért O_f és F az M-ből nézve egy irányba esnek az MF egyenesen. Ezért $FO_f = |MF - MO_f| = |f - r|$, azaz (1) jobb oldalán az első tag, $FO_f^2 = (f-r)^2$.

A két kör külső érintkezése miatt (1) jobb oldalán a második tag, $OO_1^2 = (R+r)^2$.

A 2./a, b ábrákról az is leolvasható, hogy az MF irányt véve pozitívnak, az M, O, F, O_f pontok minden szóba jövő sorrendje mellett

$$OO_f = OF - FM + MO_f = R - f + r,$$

tehát (1) jobb oldalán a harmadik tag, $OO_f^2 = (R-f+r)^2$.

Azt kaptuk, hogy

$$FE^2 = (f-r)^2 + (R+r)^2 - (R-f+r)^2 - r^2,$$

ahonnan a műveletek elvégzése után

$$FE^2 = 2Rf$$

adódik, és ez valóban csak a K körtől és az e helyzetétől függ.

II. megoldás. Az 1. ábra jelöléseit használva bebizonyítjuk, hogy a k körnek K-val és e-vel való A, ill. B érintkezési pontjait összekötő egyenes átmegy az F ponton.

Az AO_1B és AOF háromszögek hasonlók, mert egyenlő szárúak, illetve O-nál levő szárszögeik egyenlők. Ezek szerint az OAF és O_1AB szögek egyenlők és csúcsszögek, AF és AB pedig ellentétes irányúak. Ez egyértelmű állításunkkal.

Legyen most K-nak F-fel átellenes pontja G. Az FGA és FBM derékszögű háromszögek F-nél levő szöge közös, ezért hasonlók $FG : FA = FB : FM$, amiből $FA \cdot FB = FM \cdot FG$. Itt a jobb oldal állandó, a bal oldal pedig F-nek a k körre vonatkozó hatványa, ami egyenlő az F-ből húzott érintő négyzetével. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy az O_1 középpontok mértani helye egy parabola két szimmetrikus ívéből áll. A parabola fókusza O, vezéregyenese párhuzamos e-vel, tőle R távolságban halad, e-nek F-fel átellenes oldalán.

2. A II. megoldásban a derékszögű háromszög alapján $FM \cdot FG = FQ^2 = FP^2$. Eszerint az F-ből húzott érintők érintési pontjai az F körüli FQ sugarú körön vannak, e-nek F-et tartalmazó partján. A pontos elemzést az olvasóra hagyjuk.