Ha n vagy k értéke 1, akkor valamelyik számhalmazban egyetlen szám van. Ha ez a nulla, akkor valamennyi szorzat is nulla és így ekkor $m = 1$.

A továbbiakban föltehető, hogy n és k nagyobbak egynél. Tetszőleges k- elemű A_k és n- elemű B_n halmazok elemeit külön-külön növekvő sorba rendezve a lehetséges $n \cdot k$ darab szorzatot írjuk be az 1. ábrán vázolt táblázat mezőibe.

1987-01-019-1.eps

1. ábra

A táblázat i-edik sorában $(1 \leqq i \leqq k)$ az A_k i-edik elemének és a B_n elemeinek a szorzata, a j-edik oszlopában $(1 \leqq j \leqq n)$ pedig a B_n j-edik elemének és az A_k elemeinek a szorzata áll.

Legfeljebb egy sor, illetve oszlop kivételével különböző számok állnak az egyes sorokban, illetve oszlopokban; ha A_k illetve B_n tartalmazza a nullát, akkor természetesen a megfelelő sor, illetve oszlop minden mezőjében nulla áll. Föltehető ugyanakkor, hogy A_k-ban és B_n-ben is szerepel a nulla, hisz egyébként egy-egy nem 0 elemet 0-val helyettesítve a különböző szorzatok száma nem nő.

1987-01-019-2.eps

2.a ábra

1987-01-019-3.eps

2.b ábra

A táblázatban a szorzatok előjelét is feltüntettük. Előfordulhat, hogy az egyik halmaz vagy akár mindkettő azonos előjelű számokból áll; a táblázat szerkezete ilyenkor ennek megfelelően módosul (2/a, b ábrák). Előbbi feltevésünk szerint viszont más eset lényegében már nincsen, ugyanis a 2. ábrák további változatai az A_k, illetve a B_n elemeinek (-1)-gyel való szorzásával kaphatók, és ilyenkor a különböző szorzatok száma nem változik. A 2/a ábrán az A_k halmaz nem tartalmaz egyidejűleg pozitív és negatív elemeket is, ugyanez természetesen a B_n halmazra is fennállhat, de a két lehetőség szimmetrikus volta miatt ez nem ad új eredményt.

A nullaszorzatok elhagyásával táblázatunk minden esetben négy (1. ábra), kettő vagy pedig egy (2/a, b ábrák) résztáblázatra bomlik úgy, hogy az egyes résztáblázatokban minden szorzat első, illetve második tényezője ugyanolyan előjelű. Vegyük észre, hogy egy $u \times v$ méretű ilyen résztáblázat mindenképpen tartalmaz $u + v - 1$ darab különböző számot, ennél többet azonban nem feltétlenül. Elegendő ezt abban az esetben igazolnunk, amikor a szorzatokat előállító tényezők mindegyike pozitív, a további esetekben a negatív tényezőket (-1)-gyel szorozva ilyen táblázathoz jutunk, és eközben nyilván nem változik a különböző szorzatok száma.

1987-01-020-1.eps

3. ábra

A tényezők növekvő elrendezése miatt a 3. ábra szaggatott útvonala mentén minden szorzat nagyobb, mint a megelőző, és így valóban $u + v - 1$ különböző számot kapunk. (Ez egyébként bármely olyan $u + v - 1$ hosszúságú útvonal mentén igaz, amelyik a bal felső sarokból vezet a jobb alsó sarokba). Ha pedig a kitöltést meghatározó tényezőket a 2 első u, illetve v darab hatványaként választjuk, akkor a szorzatok a 2^2 és a 2^{u+v} közé eső 2-hatványok, és így a táblázatban éppen $u + v - 1$ darab különböző szorzat szerepel.

Vegyük most szemügyre ennek alapján az 1, 2/a és 2/b ábrák lehetőségeit. Korábbi megjegyzéseink szerint elegendő ezeknek az eseteknek a vizsgálata.

A 2/b ábra egyetlen „résztáblájában" a fentiek szerint legalább $1 + (n - 1) + (k - 1) - 1 = n + k - 2$ a különböző szorzatok száma – a 0-val együtt – és mivel ez a leírt módon meg is valósítható, $m \leqq n + k - 2$.

A 2/a ábrán a két résztáblázat ellenkező előjelű szorzatokat tartalmaz, így a részekből egy-egy különböző elemű maximális szorzathalmazt egyesítve továbbra sem kaphatunk egyenlő számokat. Az előbbiek szerint tehát a táblázatban ekkor a 0-val együtt legalább $1+2(k-1)+(n-1)-2 = n+2k-4$ (vagy a szimmetrikus esetben $k+2n-4$) különböző szorzat szerepel. Miután pedig $k \geqq 2$ (és $n \geqq 2$), az ilyen esetekben is van legalább $n + k - 2$ különböző a létrejövő szorzatok között.

Meg kell még vizsgálnunk, hogy az 1. ábra legáltalánosabb esetében is találhatunk-e mindig $n + k - 2$ különböző szorzatot. Az ellenkező előjelű résztáblák különböző elemekből álló maximális szorzathalmazai most is egyesíthetők, a kérdés az, hogy a négyféle lehetőség legalább mekkora elemszámot biztosít.

Legyen az A_k halmazban k_1 és k_2, a B_n-ben pedig n_1 és n_2 a negatív, illetve a pozitív elemek száma. ($k_1+k_2 = k-1$ és $n_1 + n_2 = n - 1$, és most k_1, k_2, n_1, n_2 pozitív mennyiségek.)

A korábbiak szerint az egyes negyedek ilyenkor egyenként legalább $P_1 = k_1+n_1-1$, $N_1 = k_1+n_2-1$, $P_2 = k_2+n_2-1$, illetve $N_2 = k_2+n_1-1$ darab különböző számot tartalmaznak. Az első és a harmadik esetben ezek a számok Pozitívak, a további kettőben pedig Negatívak. Táblázatunk így biztosan tartalmaz annyi egymástól és a 0-tól különböző számot, amennyi a négyféle lehetséges $P_i + N_j$ összeg maximuma.

A négy mennyiség összege $2(P_1+P_2+N_1+N_2) = 4(k+n-4)$, így a négyük maximuma legalább ennek egynegyede, $k + n - 4$, azaz a 0-val együtt most is létezik legalább $n + k - 3$ különböző szorzat.

Vegyük észre azonban, hogy a négy mennyiség maximuma akkor lesz éppen az összegük egynegyede, ha mind a négy mennyiség egyenlő. Ez pedig esetünkben pontosan akkor igaz, ha $P_1 = P_2$ és $N_1 = N_2$, azaz $k_1 = k_2$ és $n_1 = n_2$. Ezek az egyenlőségek pedig csak úgy állhatnak fenn, ha k is és n is páratlan számok. Ebben az esetben viszont meg is adhatók az A_k és a B_n halmazok úgy, hogy a különböző szorzatok száma éppen $n + k - 3$ legyen. Ehhez az szükséges, hogy a négy résztábla méretei egyenlők legyenek, az egyes résztáblákban ne legyen a minimálisnál több különböző szorzat, ezenkívül a két pozitív, illetve a két negatív résztábla ugyanazokat a szorzatokat tartalmazza.

Ez megvalósítható, ha

$$(*)\qquad \begin{aligned} A_k &= \left\{-2^{\frac{k-1}{2}},\ -2^{\frac{k-3}{2}},\ \dots,\ -2,\ 0,\ 2,\ \dots,\ 2^{\frac{k-3}{2}},\ 2^{\frac{k-1}{2}}\right\} \qquad \text{és} \\ B_n &= \left\{-2^{\frac{n-1}{2}},\ -2^{\frac{n-3}{2}},\ \dots,\ -2,\ 0,\ 2,\ \dots,\ 2^{\frac{n-3}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right\}. \end{aligned}$$

Így ha $k > 1$ és $n > 1$ páratlan számok, akkor $m = n + k - 3$.

Ha viszont n és k közül legalább az egyik páros, akkor a $P_i + N_j$ típusú összegek között vannak különbözők. Maximumuk ezért *nagyobb,* mint az összegük egynegyede, és így legalább $n + k - 3$. Ebben az esetben tehát a 0-val együtt most is van legalább $n + k - 2$ darab különböző az $n \cdot k$ darab szorzat között.

Eredményeinket összefoglalva a feladat kérdésére a következő választ adhatjuk: 1. Ha $n = 1$ vagy $k = 1$, akkor $m = 1$; 2. ha $n > 1$, $k > 1$ és mindkettő páratlan, akkor $m = n + k - 3$ azaz a létrejövő $n \cdot k$ szorzat között mindig van legalább $n + k - 3$ különböző, és az A_k és a B_n halmazokat $(*)$ szerint választva éppen ennyi; 3. ha $n > 1$, $k > 1$ és legalább az egyikük páros, akkor $m = n + k - 2$, azaz a szorzatok között mindig van legalább $n + k - 2$ különböző, és a 2/b ábra vizsgálatakor láttuk, hogy A_k és B_n megválasztható úgy, hogy a különböző szorzatok száma éppen ennyi legyen.