Az egyenlőtlenség bal oldalán az első két tag, valamint a jobb oldal minden valós x-re értelmezett, viszont a bal oldal harmadik tagja csak akkor, ha

$$0 \le x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1). \tag{2}$$

Ez nem teljesül, ha $-2 < x < -1$ vagy $1 < x < 2$, azaz ha $1 < |x| < 2$. A feladat állítása tehát értelmetlen, ha $1 < |x| < 2$. Ha viszont $|x| \le 1$ vagy $|x| \ge 2$, akkor az egyenlőtlenség már igaz. Ezt fogjuk bizonyítani.

A koszinusz-függvény értékkészlete a $[-1, +1]$ intervallum, tehát a bal oldalon két, 1-nél nem nagyobb szám összegéből egy (-1)-nél nem kisebb számot vonunk le. A bal oldal tehát mindig legföljebb 3, s csak azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\cos(2x^3 - x^2 - 5x + 2) = 1 \tag{3}$$

$$\cos(2x^3 - 3x^2 - 3x - 2) = 1 \tag{4}$$

$$\cos\left((2x+1) \cdot \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}\right) = -1 \tag{5}$$

egyszerre nem állhat fenn. Oldjuk meg először külön-külön e három egyenletet:

(3) megoldása $2k\pi = 2x^3 - x^2 - 5x + 2$

(4) megoldása $2l\pi = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

(5) megoldása $(1 + 2m)\pi = (2x+1)\sqrt{(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)}$,

ahol k, l, m egész számok.

Könnyen észrevehető, hogy $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2)$ az $x = 1$ helyen eltűnik, tehát

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x-1)(2x^2 + 5x + 2) = (x-1)(2x+1)(x+2).$$

Ezek után csak azt kell észrevennünk, hogy hasonlóan

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (2x+1)(x-2)(x+1),$$

tehát (3) megoldása és (4) megoldása jobb oldalának szorzata éppen (5) megoldása jobb oldalának a négyzete. Ha tehát volna olyan k, l és m egész, amelyre (3) megoldása, (4) megoldása és (5) megoldással egyszerre fennállna, akkor ezekre teljesülne, hogy

$$2k\pi \cdot 2l\pi = \left((2m+1)\pi\right)^2$$

azaz $4kl = (2m+1)^2$. Ámde itt a jobb oldal páratlan, a bal oldal páros, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy (3), (4) és (5) nem oldható meg egyszerre, tehát a feladat egyenlőtlenségének bal oldala (az értelmezési tartományban) soha nem éri el a 3-at.

Megjegyzések. A koszinusz-függvény argumentumaiban szereplő kifejezésekből csak azt használtuk ki, hogy kettő szorzata a harmadikkal egyenlő. Így tulajdonképpen azt kellett észrevenni hogy a feladat egyenlőtlensége a

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma < 3, \quad \text{ha} \quad \gamma = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

egyenlőtlenség speciális esete. Ugyanígy bizonyítható, hogy

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma > -3, \quad \text{ha} \quad \gamma = \pm\sqrt{\alpha\beta},$$

tehát a feladat egyenlőtlenségének bal oldalán álló kifejezés értékkészlete a $(-3, +3)$ nyílt intervallumba esik. Lényegesen nehezebb már annak igazolása, hogy a teljes $(-3, +3)$ nyílt intervallum az értékkészlet (lásd az 1984. évi OKTV spec. mat. tagozatos verseny III., rendkívüli fordulójának 3. feladatát).