

a) Az állítás bal oldalát tekintve könnyen adódik a gondolat: vessük össze a koszinusztétellel:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos \gamma = c^2 + \frac{2c^2}{\lambda}.$$

Ebből  $\lambda$ -t kifejezve:

$$(1) \quad \lambda = \frac{c^2}{ab \cos \gamma} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \gamma}.$$

A bal oldalt a szinusztétel alapján átalakítjuk, és jobb oldalon is áttérünk a szinusz és a koszinusz-függvényekre:

$$\frac{\sin^2 \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}}{\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}} = \frac{(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma},$$

egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$(2) \quad \sin \gamma = \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha = \sin(\alpha + \beta).$$

Miután  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  egy háromszög szögei, (2) minden háromszögben igaz. Innen pedig (1) és így az állítás a) része is következik, hiszen a feltétel miatt  $\cos \gamma \neq 0$ ,  $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$  pedig szintén nem 0, így a lépések megfordíthatók.

b) Mivel a  $(0, \pi/2)$  intervallumon a koszinusz-függvény szigorúan monoton csökkenő, elegendő azt belátnunk, hogy ha  $\lambda = 2$ , akkor

$$\cos \gamma \geq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

(1)-ből következik, hogy  $\lambda = 2$  esetében  $c^2 = 2ab \cos \gamma$ . Ezt ismét a koszinusz tételbe beírva

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2}{4ab} = \frac{(a-b)^2 + 2ab}{4ab} \geq \frac{1}{2}$$

valóban, egyenlőség pedig csak  $a = b$  esetén lép fel.

Ezzel az állítást igazoltuk.