

I. megoldás. a) Jelöljük a szögharmadoló egyenesek és a paralelogramma kerületének metszéspontjait E -vel, illetve F -fel. Mivel az AC átló felezi a paralelogramma területét, nem lehet mind a két pont ugyanazon az oldalon, hiszen ekkor az egyik rész területe legalább $1/2$ volna. Legyen tehát E a BC , F pedig a CD oldalon. Messe AF a BC oldal meghosszabbítását G -ben (1. ábra).

1986-09-254-1.eps

1. ábra

Mivel $EAB \sphericalangle = FAD \sphericalangle$ és $EBA \sphericalangle = FDA \sphericalangle$, ezért az EBA és FDA háromszögek hasonlóak. Ha ennek a két háromszögnek egyenlő a területe, akkor egybevágóak. Ebből következik, hogy $AB = AD$, vagyis a szerkesztendő paralelogramma rombusz, továbbá $AE = AF$.

Az AFD háromszög területe a rombusz területének harmadrésze, az FD -hez, illetve CD -hez tartozó magasságuk közös, ezért az alapok aránya $FD : CD = 2 : 3$. Az ABG és FCG háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyállásúak. A megfelelő oldalak aránya:

$$FG : AG = FC : AB = FC : DC = (DC - DF) : DC = 1 : 3,$$

ebből $DF : DC = 2 : 3$ és $AF : AG = 2 : 3$, tehát

$$(1) \quad AE : AG = AF : AG = 2 : 3.$$

$EGA \sphericalangle = DAG \sphericalangle$, mert váltószögek, és $DAG \sphericalangle = EAG \sphericalangle$, mert AG és AE szögharmadolók, tehát $EGA \sphericalangle = EAG \sphericalangle$, az AEG háromszög egyenlő szárú, és (1) alapján ismerjük oldalainak arányát: $GE : EA : AG = 2 : 2 : 3$.

Szerkeszthetünk tehát egy az AEG háromszöghöz hasonló $A'E'G'$ háromszöget, és azt a következőképp egészíthetjük ki egy a szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'D'$ rombuszá: B' -t a $G'E'$ félegyenesből, az $A'G'$ egyenesnek $A'E'$ -re vonatkozó tükörképe messe ki. Végül a $B'G'$ félegyenesre B' -ből felmérjük a $B'A' = B'C'$ hosszúságot, D' -re pedig $D'A' \parallel B'C'$ és $D'C' \parallel B'A'$. A B' metszéspont valóban létrejön, mert az $A'E'G'$ háromszög E' -nél tompaszögű, ugyanis az $A'G'$ oldal négyzete nagyobb, mint a másik kettő négyzetösszege: $9 > 8$.

A szerkesztés menetéből következik, hogy

$$D'A'G' \sphericalangle = A'G'B' \sphericalangle = E'A'G' \sphericalangle = B'A'E' \sphericalangle,$$

vagyis $A'E'$ és $A'G'$ szögharmadolók. Továbbá $A'E'$ felezi a $B'A'G'$ szöget, ezért:

$$B'E' : B'C' = B'E' : B'A' = G'E' : G'A' = 2 : 3.$$

Ebből következik, hogy a $B'A'E'$ háromszög területe valóban harmada a rombusz területének. Ez igaz az $A'F'D'$ háromszögre is, ahol F' az $A'G'$ és $C'D'$ szakaszok metszéspontja. Az $A'B'C'D'$ rombusz tehát a terület mértékszámára tett kikötés kivételével kielégíti a feladat feltételeit.

Legyen $A'B' = a$, a rombusz magassága pedig m . Területe ekkor am . Ha $A'B'C'D'$ -t $1 : am$ arányú nyújtásnak vetjük alá, akkor a kapott $ABCD$ rombuszra a feladat minden feltétele teljesül. A magasságtétel alapján \sqrt{am} szerkeszthető, így az egységszakasz ismeretében $ABCD$ -t is meg tudjuk szerkeszteni.

Mivel két egyenlő területű és hasonló alakzat egybevágó, az is következik, hogy a megoldás egyértelmű.

1986-09-255-1.eps

2. ábra

b) Legyen a C -nél levő szög harmadoló vonalainak a kerületen levő pontja H , illetve I . Rombuszunk 7 részre esik szét, közülük 4, ill. 2 rész egybevágó, a hetedik ismét rombusz. Mivel $ABCD$ tengelyesen szimmetrikus, a megfelelő szögharmadolók a BD tengelyen metszik egymást, legyenek a metszéspontok P , illetve Q (2. ábra). Az a) rész alapján $BE = 2EC$, a BEP és ECP háromszögek magassága megegyezik, ezért a BEP háromszög területe kétszerese az ECP háromszög területének. A BHP háromszög BEP tükörképe, ezért területük egyenlő. Az ECP háromszög területe tehát ötöde az $1/3$ területű BCH háromszögének. Ennek alapján már meghatározhatjuk a kérdéses területeket. A szimmetrikus helyzetű ECP , HAP , IAQ , FCQ háromszögek területe $1/15$ egység. Az ugyancsak tükrös helyzetű $EBHP$ és $IDFQ$ négyszögeké ennek négyszerese, $4/15$ egység. Végül a fennmaradó $AQCP$ négyszög területe $1 - (12/15) = 1/5$ egység.

II. megoldás a feladat a) részére (vázlat). Miután az I. megoldáshoz hasonlóan megállapítottuk, hogy a szerkesztendő négyszög rombusz és $BE : BC = BE : BA = 2 : 3$, jelöljük a BAE szöget α -val. Ekkor $ABE \sphericalangle = 180 - 3\alpha$, $AEB \sphericalangle = 2\alpha$ (1. ábra). Írjuk fel a szinusztételt az ABE háromszögben:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{BA}{(2/3) \cdot BA},$$

és ebből

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

Ennek alapján α -t, mint egy 3 egység befogójú és 4 egység átfogójú derékszögű háromszög hegyesszögét meg lehet szerkeszteni. A továbbiakat nem részletezzük.