I. megoldás Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére igenlő a válasz: a $3k+2$ $(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$ alakú számok egyike sem háromszögszám, így ezek elhagyása után a $2,\,5,\,8,\,\ldots,\,3k+2,\,\ldots$ végtelen számtani sorozat minden tagja megmarad.

Állításunk igazolásához elég azt belátni, hogy egy háromszögszám, azaz egy $\frac{n(n-1)}{2}$ alakú szám hárommal osztva nem adhat 2 maradékot. Ha n vagy $n-1$ valamelyike osztható hárommal, akkor $n(n-1)$ és így ennek fele, $\frac{n(n-1)}{2}$ is osztható hárommal. (Felhasználtuk, hogy 2 és 3 relatív prímek.)

Ha sem n, sem pedig $n-1$ nem osztható hárommal, akkor $n+1$ osztható hárommal, tehát $3l$ alakú, és így $n(n-1)=(3l-1)(3l-2)=9l^2-9l+2=$
$=9l(l-1)+2$ alakú. Itt l és $l-1$ szomszédos egészek, szorzatuk páros, ezért $9l(l-1)$ osztható 18-cal.

Azt kaptuk, hogy $n(n-1)$ 2 maradékot ad 18-cal osztva, s ezért $\frac{n(n-1)}{2}$ kilenccel és így hárommal osztva is 1-et. Tehát $\frac{n(n-1)}{2}$ valóban nem ad 2 maradékot hárommal osztva, ahogyan állítottuk.

A fentiekből az is következik, hogy a háromszögszámok kilenccel osztva csak 0, 1, 3 vagy pedig 6 maradékot adnak, így elhagyásuk után a következő végtelen számtani sorozatok is megmaradnak:

$$
\begin{gathered}
2,\,11,\,20,\,\ldots,\,9k+2,\,\ldots\\
4,\,13,\,22,\,\ldots,\,9k+4,\,\ldots\\
5,\,14,\,23,\,\ldots,\,9k+5,\,\ldots\\
7,\,16,\,25,\,\ldots,\,9k+7,\,\ldots\\
8,\,17,\,26,\,\ldots,\,9k+8,\,\ldots
\end{gathered}
$$

Megjegyzés. Hasonlóan igazolható, hogy a $2,\,7,\,\ldots,\,5k+2$, és a $4,\,9,\,14,\,\ldots,\,5k+4,\,\ldots$ sorozatok minden tagja megmarad, ugyanis egy háromszögszám öttel osztva csak 0, 1 vagy 3 maradékot adhat.

II. megoldás. Most egy általánosabb állítást bizonyítunk be. Láttuk, hogy mind hárommal, mind pedig öttel osztva van olyan maradék (pl. a 2, ill. a 4), ami nem fordul elő a háromszögszámok között, és így a $3k+2$ $(k=1,\,2,\,\ldots)$, illetve az $5k+4$ $(k=1,\,2,\,\ldots)$ végtelen számtani sorozatok megmaradnak a háromszögszámok elhagyása után. Most igazoljuk, hogy *tetszőleges p páratlan prímszámhoz van olyan maradék, amelyet $\frac{n(n-1)}{2}$ alakú szám nem adhat p-vel osztva.*

Ehhez két dolgot fogunk belátni.

1. Ha n osztható p-vel, vagy p-vel osztva 1 maradékot ad, akkor $\frac{n(n-1)}{2}$ osztható p-vel. Ez nyilvánvaló, hiszen $n(n-1)$ osztható p-vel, s így a fele is (mert 2 és p relatív prímek).

2. Hogy $\frac{n(n-1)}{2}$ a p-vel osztva mennyi maradékot ad, az csakis attól függ, hogy az n mennyi maradékot ad p-vel osztva. ($p=3$-ra ezt tulajdonképpen beláttuk az első megoldásban.) Ez következik abból, hogy ha n és m ugyanazt a maradékot adják p-vel osztva, akkor $\frac{n(n-1)}{2}$ és $\frac{m(m-1)}{2}$ is ilyenek. Valóban:

$$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}=\frac{n^2-m^2+n-m}{2}=\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}.$$

Feltevésünk szerint itt $(n-m)$ osztható p-vel, tehát a számláló, és így a fele is osztható p-vel, mert $(2,\,p)=1$. $\left(\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}\right.$ egész, hiszen két egész különbsége.$\Big)$ Ezzel a 2. állításunkat is beláttuk.

Nézzük most meg, hogy $\frac{n(n-1)}{2}$ hányféle maradékot adhat p-vel osztva. Az n nyilván p különböző maradékot adhat, a 0-t, az 1-et, a 2-t, … és a $(p-1)$-et. Az első két esetben az **1.** állítás szerint $\frac{n(n-1)}{2}$ osztható p-vel. Marad $p-2$ lehetőség, s miután a **2.** állítás szerint $\frac{n(n-1)}{2}$ maradéka csak az n maradékától függ, $\frac{n(n-1)}{2}$ legfeljebb $p-2$ különböző maradékot adhat a maradó $p-2$ esetben. Az $\frac{n(n-1)}{2}$ tehát legfeljebb $(p-1)$ különböző maradékot adhat p-vel osztva, és mivel p különböző maradék van, így legalább egy maradék valóban „kimarad”. Ezzel az állításunkat igazoltuk.

A fentiek után már következik, hogy tetszőleges p páratlan prímszámra van p különbségű végtelen számtani sorozat a „nem-háromszögszámok” között, és így persze az is igaz, hogy ha d pozitív egész és van páratlan prímosztója (d nem kettőhatvány), akkor d különbségű végtelen számtani sorozat is van a „nem–háromszögszámok” között.

(S. L.)

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy ha d kettőhatvány, akkor nincs d különbségű végtelen számtani sorozat a „nem-háromszögszámok" között.