**I. megoldás**. Az egyenlőség jobb oldala $(2y+1)^2+5$ alakba írható, soha nem kisebb tehát 5-nél és csak $y=-1/2$-re lesz 5-tel egyenlő. Az egyenletnek tehát pontosan azokra az $x$-ekre van megoldása, amelyekre

$$3\sin x-4\cos x \geqq 5, \quad \text{azaz}$$

$$3\sin x \geqq 5+4\cos x. \tag{2}$$

A jobb oldal (2)-ben biztosan pozitív ($4\cos x \geqq -4$), tehát $\sin x>0$. De ekkor az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, így négyzetre emelhetjük. A kapott egyenlőtlenségbe beírva a $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ azonosságot, rendezés után a

$$0 \geqq 16+40\cos x+25\cos^2 x=(5\cos x+4)^2 \tag{3}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Innen látszik, hogy (3) és így a vele ekvivalens (2) csak akkor teljesül, ha $\cos x=-\frac{4}{5}$. Az (1) egyenletnek tehát pontosan azokra az $x$-ekre van megoldása, amelyekre $\sin x>0$ és $\cos x=-\frac{4}{5}$, azaz $x=-\text{arc}\cos\frac{4}{5}+(2k+1)\pi \approx 2,498+2k\pi$ (vagy fokban $x\approx 143,13^\circ+k\cdot 360^\circ$), ahol k egész. Ilyenkor (1) bal oldalának értéke 5, tehát a jobb oldalé is, így $y=-\frac{1}{2}$. Az egyenlet összes megoldását az $x=-\text{arc}\cos\frac{4}{5}+(2k+1)\pi,\ y=-\frac{1}{2}$ számpárok adják ($k$ egész).

A megoldás során egyben azt is bebizonyítottuk, hogy

$$3\sin x-4\cos x \leqq 5 \tag{4}$$

minden $x$-re és egyenlőség csak $\cos x=-\frac{4}{5}$ esetén áll.

**II. megoldás**. Az első megoldás végén kimondott állítást egy sokszor alkalmazható fogással is bebizonyíthatjuk. Írjuk (4)-et

$$\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x \leqq 1$$

alakba. $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, tehát van olyan $\varphi$ szög, amelynek koszinusza $\frac{3}{4}$, szinusza $\frac{4}{5}$ ($\varphi\approx 53,13^\circ$). Az egyenlőtlenség bal oldala tehát $\sin x\cos\varphi-\cos x\sin\varphi=\sin(x-\varphi)$ alakban írható, s ez valóban soha nem nagyobb l-nél.

Ezzel beláttuk, hogy egyenletünk bal oldala legföljebb 5, és láttuk, hogy jobb oldala legalább 5. Egyenlőség csak akkor állhat, ha

$$4y^2+4y+6=5 \quad \text{azaz} \quad y=-\frac{1}{2},$$
$$3\sin x-4\cos x=5 \quad \text{azaz} \quad \sin(x-\varphi)=1,$$

tehát $x=\varphi+\pi/2+2k\pi$ ($k$ egész), ahol $\varphi=\text{arc}\sin 4/5\approx 0,9273$.

*Megjegyzés.* A II. megoldás gondolatmenete általában azt adja, hogy

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqq a\cos x+b\sin x \leqq \sqrt{a^2+b^2}$$

minden $x$-re ($a,\ b$ rögzített valós szám). Ha $a$ is , $b$ is nulla, ez világos. $a^2+b^2>0$ esetén „végigosztunk" $\sqrt{a^2+b^2}$, majd megkeressük az (egyik olyan) $\varphi'$-t, amelyre $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi'$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi'$ (ilyen $\varphi'$ van, mert $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$). Ekkor az egyenlőtlenség a

$$-1 \leqq \sin\varphi'\cos x+\cos\varphi'\sin x=\sin(\varphi'+x)\leqq 1$$

alakot ölti, ami nyilvánvalóan teljesül.