1. Belátjuk, hogy a gúlacsúcsok valóban egy pontba forgathatók össze.

Jelöléseink: az ABC háromszög síkja legyen S, a háromszög középpontja O, az $ABRT$ négyzet középpontja K, az ezen álló gúla négyélű csúcsa G, az AB alapél felezőpontja F, végül H az a pont, ahol a három gúla fő csúcsai egybeesnek (1.ábra).

1986-04-162-1.eps

1. ábra

Mivel $GA=GB$, azért G benne van az AB szakasz felező merőleges síkjában, S^*-ban, amely egyben az RT alapélt is merőlegesen felezi. Továbbá $GA=GT$ miatt G az AT, BR szakaszok közös felező merőleges síkjában is benne van, tehát G-nek S-en levő vetülete K.

Mialatt ezt a gúlát AB mint tengely körül forgatjuk, G és K az S^*-ban fordulnak el, az F körüli köríveken. Ha S-et vízszintesen tartjuk, S^* függőlegesen áll, mondhatjuk, hogy G az AB alapél S-beli f felező merőleges egyenese *fölött* halad. f egyben az ABC háromszögnek is tengelye, átmegy O-n, és így G eljuthat O fölé, ugyanis $FO<FK<FG$. Valóban az adatokból $FO=FC/3=\sqrt{3}/6=1/2\sqrt{3}$, és $FK=1/2$, továbbá FG átfogó, FK pedig befogó az FGK derékszögű háromszögben.

Jelöljük a keresett oldalélt $GA=x$-szel, és a G által leírt körívnek O fölötti pontját H^* gal. Ekkor a GAF és H^*FO derékszögű háromszögek alapján

$$GF=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}},\quad OH^*=\sqrt{H^*F^2-FO^2}=\sqrt{GF^2-\frac{1}{12}}=\sqrt{x^2-\frac{1}{3}}.$$

Az ABC háromszög szabályos volta és a gúlák közös szerkesztési elve folytán az egész alakzat önmagába megy át az S-re O-ban állított t merőleges mint tengely körüli 120°-os elfordítások útján. (A gúlákat természetesen egyformán S fölött gondoljuk.) Így a további két gúla csúcsa hasonlóan a BC, ill. CA alapél S-beli felező merőleges egyenese fölött mozog. Így a három főcsúcs csak a háromszög tengelyeinek közös O pontja fölött találkozhat, és az oldalélek közös x hossza alapján H^*-ban valóban egybe is esnek.

Felírható x-szel kifejezve a szükséges forgatások ***közös*** φ nagysága:

$$\varphi=180^\circ-GFK\sphericalangle-HFO\sphericalangle,$$

ahol

$$\cos GFK\sphericalangle=\frac{1}{2GF},\quad \cos HFO\sphericalangle=\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot HF}.$$

2. Innen azonban egyelőre csak azt olvassuk ki, hogy a tovább vizsgálandó MN, PQ, RT alapélek a kívánt forgatások után S fölött egyenlő magasságban állnak meg, egy az S-sel párhuzamos S_1 síkban lesznek. (A pontoknak a megállás utáni helyzeteit 1-es indexszel jelöljük.) Nyilvánvaló, hogy a létrejött $M_1N_1P_1Q_1R_1T_1$ szabályos hatszög O_1 középpontja az S_1 és t közös pontja, és hogy az oldalak közös hossza $T_1R_1=TR=AB=1$ (2. ábra).

1986-04-163-1.eps

2. ábra

A kimondott szimmetria alapján elég vizsgálnunk a T_1R_1 oldalt. A TR él végpontjai az S^*-gal párhuzamos síkokban fordulnak el A, ill. B körül, a T_1R_1-re merőlegesen álló egyenesek alatt, illetve fölött. Ha az első gúlát éppen 90°-kal fordítjuk el, akkor TR az AB fölé jut. Ennek alapján hozzászerkeszthetjük a szabályos hatszöghöz az S-beli pontok S_1-en levő vetületét: A' a T_1-ben T_1R_1-re és M_1-ben M_1N_1-re állított merőlegesek közös pontja, az $O_1T_1M_1$ háromszög középpontja s í.t. másrészt $T'A'=A'B'=1$.

3. Megfordítva ezt, megkaphatjuk S-ben a gúlák megállított alapéleinek vetületét (3. ábra alsó része). R_1, T_1 vetületét R_1'-vel, T_1'-vel jelölve, ezek szimmetrikusak f-re, ezért $R_1'OF\sphericalangle=R_1'OT_1'\sphericalangle/2=360^\circ/12=BCO\sphericalangle$, tehát R_1' és T_1' az a pont, amely az OCB, ill. OCA háromszöget negyedik csúcsként parallelogrammává egészíti ki. Eszerint az RB alapél a B körüli elfordítás következtében a vetületben $R_1'B=OC=1/\sqrt{3}$-ra rövidült le, az elfordítás szögére $\cos\ \varphi=1/\sqrt{3}$.

1986-04-163-2.eps

3. ábra

4. Most már csak az S^* síkban számolunk (3. ábra felső része). Ugyancsak $1/\sqrt{3}$ az $ABRT$ négyzet $EF=1$ középvonalának $E'F$ vetülete az EO egyenesre, ennélfogva a $K_1F=KF=1/2$ szakasz vetülete $K_1'F=1/2\sqrt{3}$, éppen

egyenlő FO-val. Így $K_1'O = 1/\sqrt{3}$, és ez a szakasz egyben K_1H-nak, az első gúla $K_1G_1 = m$ tengelyének a vetülete az EO egyenesre. Mivel az OHK hegyesszög szárai merőlegesek az $EFR_1\sphericalangle = \varphi$ száraira, azért

$$K_1'O = m \sin\varphi = m \cdot \frac{E_1E_1'}{E_1F} = m\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

amiből $m = 1/\sqrt{2}$, a gúlák tengelye egyenlő alapidomuk átlójának a felével.

Ez pedig azt jelenti, hogy a gúlák átlós síkmetszetében, pl. az ARG háromszögben G-nél derékszög van. A gúlák előállíthatók egységnyi élű szabályos oktaéderekből, valamelyik csúcstengelyük felező merőleges síkjával kettévágva, tehát a kérdéses oldalél hossza $x = 1$.

Azt is kaptuk, hogy H egybeesik O_1-gyel, az RTG lap $R_1T_1G_1$ helyzete S_1-ben van.

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás 1. pontjának meggondolásait átléphettük volna ezzel az elterjedt – szinte divatos – szólammal: „szimmetriaokokból nyilvánvaló”. Szabad az ilyen kifejezés olyan dolgozatokban, ahol sokkal fontosabb dolgokról van szó, és az áthidalt rész tizedrangú sincs a mondanivalóhoz képest. (Egyébként a szimmetria nem ok, hanem magyarázat, megokolás.) Itt viszont éppen ez lett volna a gyakorolnivaló! A pontszámot azonban csak ott csökkentettük, ahol tévesen használták a szimmetriát, vagy más hiba akadt.

Gyakran mondta néhai *Hajós György* akadémikus: ha egy dolgozatban hibát gyanítunk, azt elsősorban a „nyilvánvaló”-k után keressük, és más efféle elnagyolásoknál.

Azért is részleteztük az 1. részt, mert itt a gúlák, a háromszög és a hatszög különböző szimmetriáiból állnak össze a kiindulási alakzat és a véghelyzet szimmetriái.

2. Az alakzat az 1983. évi brazíliai országos versenyen szerepelt abban a változatban, hogy $GA = AB$ stb. Azt kellett bizonyítani, hogy a négyélű csúcsok egyesítése után szabályos hatszög keletkezik. Ott tehát eleve adva voltak a féloktaéderek.