I. megoldás. 1. Jelöljük a szabályos hatszög oldalát r-rel, középpontját O-val, egymás utáni csúcsait C_1-gyel, C_2-vel, ..., C_6-tal úgy, hogy az A_i pont a C_iC_{i+1} oldalszakasz belső pontja, ha $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, és A_6 a C_6C_1 szakasz belső pontja. Legyenek továbbá a leírás szerint keletkező háromszög csúcsai S_3, S_5, S_1 úgy, hogy S_3 az A_1A_2, A_3A_4 egyenespár metszéspontja, S_5 az A_3A_4, A_5A_6 páré, S_1 az A_5A_6, A_1A_2 egyenespáré. Ekkor a feltevés szerint S_i az OC_i félegyenesen van, ahol $i = 1,\ 3,\ 5$. Eleve kizárjuk, hogy A-típusú pont egybeessék C-típusú csúccsal, így az S pontok egyértelműen létrejönnek.

1986-04-158-1.eps

1. ábra

1986-04-158-2.eps

2. ábra

A feladat föltevése tulajdonképpen azt jelenti, hogy az A csúcsok közül csak hármat választottunk szabadon, a további hármat már meghatározza, hogy S_1, S_3, S_5 egy-egy hosszú átló egyenesére esik. Például A_1, A_2 és A_3 egyértelműen meghatározza az egész alakzatot: az A_1A_2 egyenes kimetszi OC_1-ből S_1-et, OC_3-ból S_3-at, az S_3A_3 egyenes OC_5-ből S_5-öt és C_4C_5-ből A_4-et, végül az S_1S_5 egyenes A_5-öt és A_6-ot. Pontosabban: a C_1A_1, C_2A_2 és C_3A_3 szakaszokból kiszámítható egyrészt az A_4, A_5, A_6 pontok távolsága az illető hatszögoldal végpontjaitól, másrészt az S_1, S_3, S_5 csúcsok távolsága O-tól és az ugyanolyan indexű C csúcstól. Ezek után megkaphatjuk azoknak a pontoknak az O-tól mért távolságát, ahol az A_2A_3 egyenes az OC_2, OC_4 félegyeneseket metszi, valamint az A_4A_5, A_6A_1 egyenesek hasonlóan kiválasztott metszéspontjainak O-tól mért távolságait.

2. Tekinthetnénk azonban az alakzatot úgy is, hogy az S_1, S_3, S_5 pontokat választottuk elsőnek, és e háromszög oldalai jelölték ki az A_i pontokat a szabályos hatszög kerületén. Ebben a felfogásban jobban kihasználhatjuk a C-hatszög szimmetriáját. Csak azt fogjuk igazolni, hogy az OC_2 félegyenesnek A_2A_3-mal való S_2^* metszéspontja azonos az A_6A_1-gyel való S_2^{**} metszéspontjával. Mivel a C hatszög az O körüli $120°$-os elfordítással önmagába megy át, másrészt minden egyes A_i pont szerepe is ugyanaz az alakzat kiépítésében, mint az A_{i-2} és az A_{i+2} ponté, azért S_2^* és S_2^{**} azonosságából az is következik, hogy az OC_4 és OC_6 félegyeneseken is egybeesik 2–2 metszéspont.

Rátérünk a tervbe vett számítás végrehajtására. Felhasználjuk, hogy a C-hatszög 2–2 alkalmasan választott oldala párhuzamos a bennük nem szereplő csúcsokat összekötő „hosszú” átló egyenesével.

3. Az $S_2^*C_2A_2$ és $A_3C_3A_2$, illetve az $S_2^{**}C_2A_1$ és $A_6C_1A_1$ hasonló háromszög párokból:

$$S_2^*C_2 = \frac{C_2A_2 \cdot C_3A_3}{C_3A_2}, \quad S_2^{**}C_2 = \frac{C_1A_6 \cdot C_2A_1}{C_1A_1}.$$

Arányuk kifejezését az alábbi sor szerint alakítjuk:

$$\frac{S_2^*C_2}{S_2^{**}C_2} = \frac{C_2A_2}{C_2A_1} \cdot \frac{C_1A_1}{C_3A_2} \cdot \frac{C_3A_3}{C_1A_6}. \tag{1}$$

Azt fogjuk belátni, hogy a jobb oldal értéke 1, ez jelenti azt, hogy S^* és S_2^{**} egybeesik.

A jobb oldal első tényezője – mint arány – egyenlő az OS_1/OS_3 aránnyal, mert a $C_2A_1A_2$ és OS_3S_1 háromszögek megfelelő oldalegyenesei páronként párhuzamosak, ill. egybeesnek, a két háromszög hasonló. A második tényezőt a $C_1A_1S_1$ és OS_3S_1, valamint $C_3A_2S_3$ és OS_1S_3 háromszögpárok hasonlósága alapján alakítjuk tovább:

$$C_1A_1 : C_3A_2 = \frac{OS_3 \cdot C_1S_1}{OS_1} : \frac{OS_1 \cdot C_3S_3}{OS_3} = \left(\frac{OS_3}{OS_1}\right)^2 \cdot \frac{C_1S_1}{C_3S_3}.$$

Végül (1) harmadik tényezőjében a $C_3A_3S_3$ és OS_5S_3, illetve a $C_1A_6S_1$ és OS_5S_1 párok hasonlósága alapján

$$C_3A_3 : C_1A_6 = \frac{OS_5 \cdot C_3S_3}{OS_3} : \frac{OS_5 \cdot C_1S_1}{OS_1} = \frac{OS_1}{OS_3} \cdot \frac{C_3S_3}{C_1S_1}.$$

Mindhárom tényező átalakított kifejezésében csak az S_1, S_3, S_5 pontoknak az O-tól, illetve a megfelelő C_i-től való távolságai szerepelnek – ezzel teljesen felhasználtuk az $S_1S_3S_5$ háromszög helyzetére vonatkozó föltevést – és a szorzat értéke valóban 1. Evvel bebizonyítottuk az állításnak S_2-re vonatkozó részét, és ebből – mint előrebocsátottuk – az S_4-re, S_6-ra vonatkozó része is következik.

Az S_1, S_3, S_5 pontokról csak azt használtuk fel, hogy nem esnek egybe O-val és az ugyanolyan indexű C-vel, és hogy olyanok, hogy pl. A_1 és A_2 különbözők egymástól, és így C_2-től is stb. Ennélfogva a feladat állítása minden ilyen megválasztású $S_1S_3S_5$ háromszögből keletkezett alakzatra is érvényes. (A 2.ábrán S_3 a C hatszög belsejében van. Az érdeklődő számos másféle felvételt is kipróbálhat.) *Megjegyzés.* Érdekes észrevétel az ábrákon, hogy az új háromszög oldalai párhuzamosak az első háromszög oldalaival, $S_2S_4 \parallel S_5S_1$ s i.t. Ez az $A_3S_3 : S_5S_3 = C_3S_3 : OS_3 = A_2S_3 : S_1S_3$ arányok egyenlőségéből következik. Többen erre építették fel bizonyításukat.

II. megoldás. A feladat állítását azáltal bizonyítjuk, hogy az ábra valamennyi vonalának egységes térbeli értelmezését adjuk. Első meglátásunk az, hogy a szabályos hatszög oldalainak és szóban forgó hosszú átlóinak együttese tekinthető egy kocka összes éle képének – merőleges vetületének – egy olyan síkon, amely merőlegesen áll a kocka egyik testátlójára. (Más szóval: a vetítés ezzel a testátlóval párhuzamosan történik.)

1986-04-160-1.eps

3.a ábra

Az a két kockacsúcs, amelyik ezt a testátlót meghatározza, a vetületben egybeesik, ez ábránk O pontja. Ha a kockán a testátló végpontjait O_1-gyel és O_2-vel jelöljük úgy, hogy az O_1-ből kiinduló élek O_1C_1, O_1C_3, O_1C_5 legyenek, akkor a kocka egy lapja $O_1C_1C_2C_3$, és az ezzel párhuzamos lapja ugyanúgy körüljárva $C_5C_6O_2C_4$. A $C_1C_2\ldots C_6$ térbeli hatszög minden egyes oldala kockaél, a síkbeli hatszög pedig a képnek „kontúrvonala". A kocka még hátra levő három éle pedig O_2-ben fut össze (3/a ábra).

A feladatbeli alakzatnak a föltevésben és a bizonyítandó állításban szereplő 3–3 egyenesét ezek után tekinthetjük egy T sík által a kocka 6 lapsíkjából kimetszett egyenesek vetületének. A síkot meghatározza bármely olyan 3 pont az $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_6$, valamint $S_1,\ S_3,\ S_5$ közül, amely nem esik egy egyenesbe. Vegyük úgy, hogy a T síkot az O_1-ből kifutó élek egyenesein levő S_1, S_3, S_5 pontjaival választottuk meg. Ekkor a föltevésbeli S_1S_3, S_3S_5 és S_5S_1 egyenesek T metszésvonalai az O_1-ben összefutó lapsíkokkal, sorra ezekkel: $O_1C_1C_2C_3$, $O_1C_3C_4C_5$ és $O_1C_5C_6C_1$, továbbá $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_6$ sorra a C_1C_2, a $C_2C_3, \ldots$, a C_6C_1 él pontja (3/b ábra).

1986-04-160-2.eps

3.b ábra

Így pedig a vizsgálandó egyenesek a T síknak a további 3 kockalappal való metszésvonalai, hiszen A_2 és A_3 összekötése a $C_2C_3C_4O_2$ lappal, A_6 és A_1 összekötése a $C_2C_1C_6O_2$ lappal való metszésvonalat jelenti. E két egyenes metszéspontja mindkét lapsíkban benne van, tehát rajta van az O_2C_2 él egyenesén, ez az S_2, és ez éppen a bizonyítandó állítás első része. Ugyanígy adódik, hogy a további két metszéspont, S_4, ill. S_6 rajta van az O_2C_4, ill. az O_2C_6 él egyenesén.

Ebben a felfogásban az $A_1A_2\ldots A_6$ hatszög szemben fekvő oldalának párhuzamos volta abból adódik, hogy a sík a kocka párhuzamos lapsíkpárjait párhuzamos egyenesekben metszi. Továbbá így elfajult eseteknek is értelmet tulajdoníthatunk, mint pl. $A_1 = C_1 = A_6 = S_1$-nek.

Megjegyzések. 1. Könnyen adódik ezek után a feladat általánosítása: *centrálisan szimmetrikus hatszöget venni* a szabályos hatszög helyére. A 4. ábrán O_1 az a pont, amellyel az O_1C_1, O_1C_3, O_1C_5 szakaszok a $C_1C_2\ldots C_6$ hatszöget 3 paralelogrammára darabolják, és ennek O-ra való O_2 tükörképével ugyanez igaz az O_2C_2, O_2C_4, O_2C_6 szakaszokra. (Itt O a hatszög centruma.) Ha az A_1A_2, A_3A_4 és A_6A_1 egyenesek páronkénti S_1, S_3, S_5 metszéspontjai rendre rajta vannak az O_1C_1, O_1C_3, O_1C_5 egyenesen, akkor az A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1 egyenesek páronkénti S_2, S_4, S_6 metszéspontjai rendre az O_2C_2, O_2C_4, O_2C_6 egyenesen vannak.

1986-04-161-1.eps

4. ábra

Az I. megoldás számításai szinte betűről betűre átvehetők, mert ott a szabályosságból kizárólag bizonyos egyenesek párhuzamosságát használtuk ki, azok pedig itt is megvannak. (O mellé 1-es indexet kell tennünk.)

A II. megoldás meggondolása is átvehető. A $C_1C_2\ldots C_6$ centrálszimmetrikus hatszög csúcsai és a 3–3 paralelogrammára osztó O_1, O_2 pontjai mindig tekinthetők egy paralelepipedon valamilyen irányú párhuzamos vetületének, a további egyenesek pedig a 6 lapsík és egy alkalmas metsző sík metszés vonalai vetületének. Itt már nem is kell értelmezést adni a vetítés irányára.

2. Eddig csak „könnyű" példákat említettünk az A-pontok és az S_1, S_3, S_5 pontok együttesének (illetve a T síknak) 3 alkalmas képviselőjük által való meghatározására. A 4. ábrához kapcsolódva elmondunk egy kis „fogást", amely célra vezet abban a „nehéz" esetben, ha A_1, A_3 és A_5 adottak, vagyis testeink három kitérő élének 1–1 pontja.

Tekintsük fedőlapnak az $O_1C_1C_2C_3$ lapot és keressük meg ennek az A_3A_5 egyenesen levő X pontját. Azt ismerve, nyilván az XA_1 egyenes metszi ki az A_2, S_1, S_3 pontokat. Mozgassunk gondolatban 1–1 pontot az alapsíkbeli C_4-ből és A_5-ből egyenletesen úgy, hogy egyszerre érjenek A_3-ba, majd tovább ugyanígy, míg elérik a fedősíkot. Így a két pont összekötő egyenese állandóan párhuzamos a C_4A_5 egyenessel, az alap- és a fedősíkkal, tehát egyidejűen érkeznek C_3-ba, ill. X-be. Eszerint XC_3 párhuzamos C_4A_5-tel.

Vannak más nehéz esetek is! Az ilyen X-ek révén emelkedik az S_jS_{j+2} típusú egyenesek „nevezetes" pontjainak a száma.