I. megoldás. Jelöljük a BC oldal felezőpontját F-fel, a beírt körnek az AC, BC befogón levő érintési pontját B_1-gyel, ill. A_1-gyel. Felhasználjuk, hogy minden háromszögben a szokásos jelölések mellett $CB_1 = CA_1 = s - c$, esetünkben pedig, mivel az OA_1CB_1 idom négyzet, azért a beírt kör sugara:

$$\varrho = s - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

1986-04-156-1.eps

1. ábra

Megmutatjuk, hogy a kérdéses D pont a B_1 tükörképe az AC befogó G felezőpontjára nézve, vagyis $DA = B_1C = \varrho$. A DOB_1 és OFA_1 háromszögek nyilvánvaló hasonlóságából

$$DB_1 : B_1O = OA_1 : A_1F,$$

ahonnan

$$DB_1 = \frac{\varrho^2}{A_1F} = \frac{\varrho^2}{\frac{a}{2} - \varrho} = \frac{(a+b-c)^2}{2(a-2\varrho)}.$$

A számlálót – kifejtve és a Pitagorasz-tétel alkalmazásával – szorzattá alakítjuk:

$$2c^2 - 2ac - 2bc + 2ab = 2(c-a)(c-b),$$

a nevező pedig a második ϱ-képlet átrendezésével $2(c-b)$-vel egyenlő. Így – ismét ϱ alapján –

$$DB_1 = \frac{(c-a)(c-b)}{c-b} = c - a = b - 2\varrho,$$

ennélfogva $DC = b - \varrho$ és $AD = AC - DC = \varrho$, amint állítottuk.

Ezek alapján a vizsgálandó arány az AOB_1 derékszögű háromszög alapján

$$\frac{AD}{DC} = \frac{B_1O}{AB_1} = \operatorname{tg} B_1AO\sphericalangle = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

hiszen AO felezi a CAB szöget.

Megjegyzések. 1. Szigorúan véve $A_1F = \left|\frac{a}{2} - \varrho\right|$ kifejezés lett volna a helyes, de mindjárt átgondoltuk, hogy a $2\varrho > a$ nagyságviszony lehetetlen.

2. Könnyű belátni, hogy D az a pont, ahol az ABC háromszög AC oldalához „hozzáírt külső érintő kör” érinti ezt az oldalt.

Ez a számolás útján nyert „szerkezeti összefüggés” újabb megoldás keresésére sarkallhat.

II. megoldás. Rajzoljuk meg a beírt kör AC befogóval párhuzamos másik érintőjét. Messe ez a háromszög oldalait az A^*, ill. C^* pontban, az érintési pontot pedig jelölje D^* (2. ábra).

1986-04-157-1.eps

2. ábra

A megoldás alapötlete az – a 2. megjegyzés értelmében most már nyílt kártyákkal játszunk –, hogy a BC^*A^* háromszöget B-ből a BCA háromszögbe nagyítva D^* a D-be megy át. Ezt persze most újra bizonyítanunk kell, de a lépések „maguktól adódnak”.

Szükség van a C^*B szakasz felezőpontjára – legyen ez F^*. Ekkor $FF^* = BF - BF^* = \frac{1}{2}(BC - BC^*) = \frac{1}{2}CC^*$, és ez épp ϱ, hisz CC^* az ABC háromszög beírt körének átmérőjével egyenlő.

Az OD^*F^*F négyszögben tehát $OD^* = FF^* = \varrho$, és ez a két oldal nyilván párhuzamos is. A négyszög tehát paralelogramma, így másik két oldala is párhuzamos, és nekünk éppen erre volt szükségünk, hiszen az említett nagyítás során F^*D^* az F-en átmenő, F^*D^*-gal párhuzamos egyenesbe, tehát az FD-be megy át. Mivel pedig A^*C^* az AC be megy át, a D^* képe valóban a D.

Most akár betorkollhatnánk az előző megoldás gondolatmenetébe is, azonban az eddigiek alapján gyors befejezést találhatunk.

A talált hasonlóság miatt a keresett $\frac{AD}{DC}$ arány $\frac{A^*D^*}{D^*C^*}$-gal egyenlő. $D^*C^* = \varrho = D^*O$, így a keresett arány az A^*D^*O derékszögű háromszögben tg $A^*OD^*\sphericalangle$.

Mivel $A^*OA\sphericalangle = 90^\circ$ – az A és az A^* csúcsú, párhuzamos szárú szögek szögfelezőiről van szó – másrészt $OD^* \perp AC$ az A^*OD^* és az OAC szögek merőleges szárú hegyesszögek, és így egyenlők.

A keresett arány ezért az OAC szögnek – tehát az A-nál levő szög felének – a tangense.