I. megoldás. $n=1,\ 2$-re az állítás nyilvánvalóan igaz, ám $n=3$, 4-re könnyű ellenpéldát készíteni: az 1, 2, 4, 5 számok közül semelyik három különbözőnek az összege nem osztható 3-mal. A feladat szövege azonban $n=3$-ra és $n=4$-re is azt követeli, hogy pozitív legyen az ilyen számhármasok száma.

Bebizonyítjuk, hogy $n \geqq 5$-re a feladat állítása igaz.

Először is megmutatjuk, hogy öt különböző egész között van három különböző, amelyek összege osztható hárommal. Ha ugyanis az öt között van három olyan, amelyek ugyanazt a maradékot adják 3-mal osztva, akkor ezek összege nyilván osztható 3-mal.

Ha viszont a $3k$, $3l+1$ és $3m+2$ számalakok mindegyikéből legföljebb kettő van, akkor mindhárom fajtának elő kell fordulnia az öt szám között. Van tehát egy-egy $3k$, $3l+1$ és $3m+2$ alakú szám (k, l, m egész), ezek összege pedig szintén osztható 3-mal.

Legyen most $n \geqq 6$. Válasszunk ki minden lehetséges módon öt különböző számot az n darab szám közül. Ezt $\binom{n}{5}$-féleképpen tehetjük meg. A fentiek szerint minden ilyen számötösből kiválasztható három, amelyben a számok összege osztható 3-mal. Kaptunk $\binom{n}{5}$ megfelelő hármast, ezek között azonban lehetnek azonosak is. Egy $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ hármast viszont legföljebb annyiszor választhatunk ki, ahány ötösben egyáltalán előfordul, vagyis ahányféleképpen a maradó $n-3$ számból kettőt mellétehetünk. Ez tehát legföljebb $\binom{n-3}{2}$ előfordulást jelent minden egyes kiválasztott számhármasra nézve. Kaptunk tehát $\binom{n}{5}$ megfelelő hármast, s ezek között minden egyes hármas legföljebb $\binom{n-3}{2}$-ször fordul elő. Összesen tehát legalább $\binom{n}{5}\Big/\binom{n-3}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)}{60}$ különböző olyan számhármasnak kell lennie, amelyben a három szám összege osztható 3-mal.

A feladat állítását tehát $n \geqq 5$-re (és $n=1$, 2-re) bebizonyítottuk.

II. megoldás, az $n \geqq 6$ esetre teljes indukcióval.

Láttuk, hogy $n=5$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n-re igaz és legyen adott $n+1$ különböző egész, $a_1,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$. Az indukciós feltevés szerint az $n+1$ darab

$$\begin{array}{lllllllll}
 & a_2, & a_3, & \ldots, & a_{i-1}, & a_i, & a_{i+1}, & \ldots, & a_n,\ a_{n+1}, \\
a_1, & & a_3, & \ldots, & a_{i-1}, & a_i, & a_{i+1}, & \ldots, & a_n,\ a_{n+1} \\
 & & \vdots & & & & & & \\
a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_{i-1}, & & a_{i+1}, & \ldots, & a_n,\ a_{n+1} \\
 & & \vdots & & & & & & \\
a_1, & a_2, & a_3, & & \ldots, & & & & a_n
\end{array}$$

szám n-es mindegyikéből kiválasztható $\frac{n(n-1)(n-2)}{60}$ megfelelő szám hármas. Így összesen $\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{60}$ megfelelő számhármast kaptunk. Az a_i, a_j, a_k számhármast az i., j. és k. sorban biztosan nem választottuk ki, tehát bármely számhármas legföljebb $n+1-3=n-2$-szer fordul elő. Így a megfelelő számhármasok között legalább

$$\frac{(n+1)n(n-2)}{60}\Big/(n-2)=\frac{(n+1)n(n-1)}{60}$$

különböző van, a feladat állítása tehát $n+1$ -re is igaz. Ezzel az indukciós lépést, s így az állítást is bebizonyítottuk.