I. megoldás. E-vel és F-fel az AC, ill. BD átló felezőpontját jelöljük, ezenfölül a BC oldal felezőpontját G-vel, az AB és a CD oldalak közös hosszát pedig $2k$-val (1. ábra).

1986-03-111-1.eps

1. ábra

Ekkor

$$EG=\frac{AB}{2}=k=\frac{DC}{2}=FG,$$

mert itt az első és az utolsó hosszúság középvonal az ABC, ill. DCB háromszögben. Így EFG egyenlő szárú háromszög. Ez valódi háromszög, mert E és F egymástól a feladat föltevése alapján, G-től pedig a négyszög konvexsége miatt különböző. (Az A és D csúcsok a BC egyenesnek ugyanazon a partján vannak, nincsenek rajta BC-n, ennélfogva ugyanezek érvényesek a felezéssel nyert E és F pontokra is.)

Eszerint a GE és GF egyenesek egyenlő szögeket zárnak be a vizsgálandó EF egyenessel. Mivel pedig GE egyirányú BA-val és GF a CD-vel, ezért BA és CD is egyenlő szöget alkotnak EF-fel. Ezt kellett bizonyítanunk.

Bíró József (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Akinek a tudatában ott él, hogy két metsző egyenes között nagyságra nézve általában kétféle szög van (egyetlen kivétel a merőlegesség, ami éppen ezért különleges eset), az kissé bizonytalannak érzi az állítást. Valami ilyen ködlik: az EF és AB egyenespár, valamint az EF és CD pár szögei közül *lehet egyenlőket összeválogatni.* Pontosítani lehet az állítást úgy, ha megadjuk a menetirányt az EF egyenesen pl. E-től F felé. Ekkor a négyszög belsejében levő szögek az egyenes bal oldalán egyenlők, tehát a jobb oldalán is. (Most már rájövünk, hogy máshogy nem is lehet, különben AB és CD párhuzamosak lennének, ami azt jelentené, hogy $ABCD$ paralelogramma, vagyis E és F egybeesnek.)

2. A megoldás gondolatmenetével úgy is bizonyítható az állítás, ha G helyett az AD oldal H felezőpontját használjuk fel. Szóra sem volna érdemes ez a meglátás, ha nem lehetne valami érdekeset kiolvasni belőle, elvégre egyelőre csak arról van szó, hogy a kiszemelt AB és CD oldalak egyenrangúak, tehát a további két oldal, BC és DA is.

1986-03-111-2.eps

2. ábra

Nos, ha G-t és H-t *egyszerre* használjuk fel, akkor az $EGFH$ négyszögnek mind a négy oldala k, emiatt átlói, EF és GH merőlegesek (2. ábra). Akkor pedig a merőleges szárú (hegyes-)szögek tétele alapján a GH egyenes is egyenlő szögeket zár be az AB és CD oldalak egyeneseivel. *Ami érvényes a csúcsok A és C, valamint B és D párba állítására, az igaz a másik, A és D, valamint B és C párba állításra is.* (Egy tréfás kifejezés módosításával: mégiscsak volt haszna, hogy két ágyúval lőttünk egyetlen verébre.)

3. Miért szerepel a szövegben a „konvex" szó? Mert az iskolában alig jut idő nem konvex idomok „igényes" vizsgálatára. (A konvex idom földbirtokra emlékeztet; még a konkáv is, de hurkolt négyszög már nem.) A megszokás hatására a legtöbb beküldő akkor is csak konvex négyszöggel foglalkozna, ha ez a megszorítás nem szerepelne a szövegben.

1986-03-112-1.eps

3. ábra

Nézzük meg hát, mi lesz, ha 1–2. ábráinkon C és D betűzését fölcseréljük, tehát $ABCD(A)$ hurkolt négyszög (3. ábra). (A kiinduló 4 pont kölcsönös helyzete ugyanaz.) Most lesz jó, hogy már előbb nem egyedül G-t vettük segítségül, hanem H-t is: a rombusz csúcsai ugyanazok, csupán E és F az előbbi H és G helyén adódnak – és viszont. Tehát az állítás hurkolt négyszögre is érvényes. (Vázoljon fel az olvasó nem hurkolt, konkáv esetet is!)

4. Lehetne bizonyítani az állítást vektorokkal is, kihasználva, hogy $\overrightarrow{EF}$ nem 0-vektor. Kiderül, hogy a bizonyítás nem használta ki a négyszög konvex voltát. (A vektor-módszer még megfogalmazni is nehézkesen tudná ezt a tényt.) Inkább arra lenne jó ez a bizonyítás, hogy az éppen frissen megismert vektorokkal megbarátkoztasson.

5. Így „felvértezve" fogadja az olvasó a következő koordináta-geometriai megoldást is! *E mellé tudatosan nem adunk ábrát.* Az ábrák tulajdonképpen csak a tanulás időszakára valók – hacsak nem konkrét helyzetet vizsgáló feladatról van szó.

II. megoldás. A föltevés folytán az AB és CD egyenesek nem párhuzamosak, hiszen különben az A, B, C, D pontnégyes konvex burka paralelogramma volna: AB párhuzamos CD-vel, és így vagy az lenne, hogy E, F azonosak, vagy (hurkolt esetben) az EF egyenes párhuzamos lenne AB-vel, CD-vel.

Jelöljük pontjaink koordinátáit a megválasztandó koordináta-rendszerben már előre így:

$$A(a_1,\ a_2),\ B(b_1,\ b_2),\ C(c_1,\ c_2),\ D(d_1,\ d_2),\ E(e_1,\ e_2),\ F(f_1,\ f_2),$$

tehát

$$e_i = \frac{a_i + c_i}{2} \quad \text{és} \quad f_i = \frac{b_i + d_i}{2}, \quad i = 1,\ 2.$$

Válasszuk a derékszögű rendszer x-tengelyét úgy, hogy az AB, CD oldalak ezen levő vetületei egyenlők legyenek:

$$|b_1 - a_1| = |d_1 - c_1|. \tag{1}$$

Ez azt jelenti, hogy az AB, CD egyeneseknek az x-tengellyel bezárt *hegyes* szöge egyenlő (az előbbiek szerint ugyanis az x-tengely nem lehet párhuzamos egyikükkel sem). A távolságnak koordinátákkal való $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ kifejezése, az $AB = CD$ föltevés, valamint (1) alapján az y-tengelyre való vetületek is egyenlők:

$$|b_2 - a_2| = |d_2 - c_2|, \tag{2}$$

tehát AB-nek és CD-nek az y-tengellyel bezárt hegyes szögei is egyenlők.

Ha mármost (1)-ben az abszolútérték-jelekben álló különbségek előjele ellentétes:

$$b_1 - a_1 = c_1 - d_1, \quad \text{vagyis} \quad b_1 + d_1 = a_1 + c_1,$$

tehát $f_1 = e_1$, akkor azt kaptuk, hogy az EF egyenes merőleges az x-tengelyre, párhuzamos az y-tengellyel, ennélfogva az állítás igaz.

Ha pedig (1) felbontása így alakul:

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1, \tag{1a}$$

akkor (2) felbontása csak a következő lehet:

$$b_2 - a_2 = -(d_2 - c_2), \tag{2a}$$

ugyanis a megegyező előjelű megválasztás (1a)-val együtt azt jelentené, hogy AB párhuzamos CD-vel, amit kizártunk. Mármost (2a)-ból

$$b_2 + d_2 = a_2 + c_2, \quad \text{azaz} \quad f_2 = e_2,$$

tehát EF az x-tengellyel párhuzamos, az állítás változatlanul igaz. A bizonyítást befejeztük.