1. A leírt „átlós” metszetek egyértelműen meghatározzák az illető kockákat. Például mivel $AA_1 = a$, azért $AC = a\sqrt{2}$, és a téglalapot $AC$ felező merőlegese körül derékszöggel elfordítva, megkapjuk a $BDD_1B_1$ metszetet. A metszetek közös $O$ középpontja egyben a kockák közös centruma. A feladatban szereplő közös $S$ sík mindkét kockának szimmetriasíkja. A feltételben említett forgatás térbeli $t$ tengelye pedig – az $O$-n átmenő, $S$-re merőleges egyenes – a feladatban szereplő átlós metszetek olyan forgási szimmetriatengelye, amely körül 180°-kal elfordítva önmagukba jutnak. Ezért $t$ átmegy a $BB_1$ és $DD_1$, ill. $FF_1$ és $HH_1$ élek felezőpontjain, amelyeknek $O$-tól mért távolsága egyformán $AC/2 = a/\sqrt{2}$, tehát a két élpár $1-1$ tagja metszi egymást, metszéspontjuk $K$, ill. $K_1$ (1. ábra). A két kocka a $t$ körüli 90°-os elfordítással is átmegy egymásba.

1986-03-107-1.eps

*1. ábra*

A vizsgálandó test örökli a két kockától, hogy az $S$-re való tükrözés, valamint a $t$ körüli 90°-os elfordítások önmagába viszik át. Van még 2 további közös szimmetriasíkjuk is. Ezek a szimmetriák megkönnyítik a térfogatszámítást.

További metsző élpárok is vannak az alakzaton. Egy ilyen az 1. ábra betűzése mellett $AB$ és $GF$ – és további 7 szimmetrikus társ-élpár. Ugyanis az $A$, $G$, $B$, $F$ csúcsok egy síkban vannak, mert az $AG$ és $FB$ egyenesek párhuzamosak. Jelöljük az $AC$ és $EG$ lapbeli átlók $S$-beli felező merőlegesét $t_1$-gyel, ill. $t_2$-vel, akkor $AG$ párhuzamos e két újabb tengely egyik szögfelezőjével, és ugyanez érvényes $FB$-re is, mert $BFB_1F_1$ négyzet, és $BB_1 || t_1$, $FF_1 || t_2$.

Eszerint az $AGBF$ négyszög trapéz és átlói egyenlők, $AB = FG = a$. Ezek metszéspontját $M$-mel jelöljük, és mindjárt kiszámítjuk $MA = MG$ és $MB = MF$ részeik hosszát. Az $AG$ szakasz átfogó egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögben, amelyben a befogók hossza $(EG - AA_1)/2 = a(\sqrt{2}-1)/2$, így $AG = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Hasonlóan $BF = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ezek szerint

$$AM : MB = AM : (a - AM) = AG : BF = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

amiből

$$AM = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad BM = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

2. A térfogatszámításhoz az első kockából indulunk ki, és a másodikat odaképzelve leírjuk azokat a részeket és kiszámítjuk térfogatukat, amelyek az első kockából a másodikon kívülre esnek. Könnyű olyan nézeteket rajzolni az alakzatról, amelyekben a második kocka egy-egy lapját „élben” látjuk (a lap vetülete egyenes szakasz).

1986-03-108-1.eps

*2. ábra*

A 2. ábrán a nézőirány az $AA_1$ él, egyben a $GE$ átló iránya, így a második kocka $EFGH$ és $E_1F_1G_1H_1$ lapjait egyenes szakaszoknak látjuk, és ezek az $AMN$ és $CQP$ egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögeket metszik le az első kocka nézetéből, amely csupán az $ABCD$ négyzet. Itt $N$ és $Q$ az $M$ tükörképei az $AC$, ill. $BD$ tengelyre nézve, $P$ pedig e kettőnek közös képe ugyanezen tengelyekre.

Valójában egybevágó hasábokat metszenek le a síkok, az $EFGH$ lap által lemetszettnek az alapja az $AMN$ háromszög, oldaléle (magassága) $AA_1 = a$, így e két hasáb együttes térfogata

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM^2 \cdot AA_1 = a^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^3 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right).$$

1986-03-108-2.eps

*3. ábra*

A 3. ábrán az $AC$ átló és a $GG_1$ él a nézőirány, itt a második kocka további 4 lapját látjuk „élben”, az első kockának pedig az $ABCD$ lapját és ami ezzel párhuzamos. A fönt megállapított szimmetria alapján elég azt a gúlát tekintenünk, amely a $GF$ lapon kívül esik. Alaplapja az előző nézet szerint a $BMQ$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, negyedik csúcsa $K$, a $BB_1$ és $FF_1$ élek közös felezőpontja. Az alap területe $MQ^2/4 = a^2/4$, a magasság $BK = a/2$. Így a 4 egybevágó gúla térfogatának összege

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Számba vettük a levágásoknál a második kockának mind a 6 lapját. Az első kockából lemetszett részek térfogatának összege

$$a^3\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{6}\right)=a^3\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right),$$

ennélfogva a két kocka közös részének térfogata

$$a^3\left(1-\frac{5}{3}+\sqrt{2}\right)=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=a^3\cdot 0,748$$

térfogategység.

*Megjegyzések.* 1. A fenti leírás után önállóan is leírhatjuk a közös részt. A $2\cdot 6=12$ kockalap mindegyikéből egy-egy rész határolja. A $t$-re merőlegesen középen 4 téglalap (pl. $MNPQ$) egy hasábot határol, alapidoma $a$ oldalú négyzet, magassága $MN=\sqrt{2}\cdot AM=a(\sqrt{2}-1)$. Erre mindkét véglapján egy-egy négyoldalú gúla épül, magassága $a/2$, fele annyi, mint a $BMQ$ háromszög $MQ$-ra merőleges magassága. Így a térfogat ismét

$$V=a^2\left(MN+\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right).$$

A maradéktest tengelyének hossza $2\cdot OK=a\sqrt{2}$ (4. ábra).

1986-03-109-1.eps

*4. ábra*

2. Ha a 2. és 3. ábrákat úgy állítjuk egymáshoz képest, hogy az $ACC_1A_1$ metszetek élben látszó képei egy $g$ egyenesbe essenek, akkor a két nézet tulajdonképpen az ábrázoló geometria elemeiben szokásos első és második kép. Méghozzá egymás tükrös képei egy a $g$-re merőleges képtengelyre, különben az egyes képeknek is két merőleges szimmetriatengelye van. Többen ilyen vetületpárból olvasták ki az $AB$ és $FG$ típusú élpárok metsződését, abból, hogy a két nézet látszólagos metszéspontjait összekötve, ez az egyenes párhuzamos $g$-vel, vagyis a két látszó kép ellenőrzi egymást, a metszés valóságos.

3. A bevezető számítás szerint $AMG\sphericalangle=60^\circ$. Vázoljuk ennek egy távolabbi kapcsolatát. A második kockát úgy is megkapjuk az elsőből, hogy $90^\circ$-kal elfordítjuk a $BB_1$ és $DD_1$ élek felezőpontjait összekötő $KK_1$ „éltengely” körül. Ugyanilyen forgatást végezve az $AA_1$ és $CC_1$-hez tartozó éltengely körül, ez a harmadik kocka ugyanolyan kölcsönös helyzetben lesz a másodikkal is, mint az elsővel, és a 3 kocka együttese többféle szimmetriával átvihető önmagába. Ebből értelmezhető a $60^\circ=180^\circ/3$.

1986-03-109-2.eps

*5. ábra*