

Előzetes megjegyzés. Jobban fejezzük ki a dolgozatok tartalmát, „műfaját”, ha a szokásos –és kissé sablonos – „megoldás” szó helyett ezúttal mást használunk. Mindig célszerű mérlegelni, hogy rokon értelmű szavak közül melyik a találóbóbb.

I. hozzászólás. A javaslat nem szab ki feltételt a háromszögre, így az egyaránt lehetne hegyes-, derék- és tompa-szögű is. Viszont a derékszögű háromszögeket „kapásból” kizárhatjuk, hiszen azokban M azonos a derékszög csúcsával, tehát valamelyik nevező 0. Továbbá „belső szemlélet” útján látjuk, hogy „nagyon lapos” háromszögekben M mindegyik csúcstól messzebb van, mint a megfelelő oldal (1. ábra), tehát (1) bal oldala az $1+1+1=3$ értéket sem éri el. Egyszerű számpélda is mutatja, hogy (1) nem érvényes, ha $\gamma = ACB \angle = 120^\circ$ és $CA = CB$, pl. $= 1$, amikor $\alpha = \beta = 30^\circ$, az MAB háromszög szabályos, és a bal oldal értéke $5/\sqrt{3} < 3\sqrt{3}$ (2. ábra).

1986-03-104-1.eps

1. ábra

1986-03-104-2.eps

2. ábra

Megmutatjuk viszont, hogy (1) minden hegyesszögű háromszögre érvényes. Ilyenkor M a háromszög belsejében van, a háromszög területe egyenlő az MBC , MCA , MAB háromszögek területének összegével (3. ábra).

1986-03-104-3.eps

3. ábra

A területek 2-szeresét véve, a merőleges szárú szögek tétele alapján

$$cb \sin \alpha = MB \cdot MC \sin (180^\circ - \alpha) + MC \cdot MA \sin (180^\circ - \beta) + MA \cdot MB \sin (180^\circ - \gamma).$$

Szorozzuk mindkét oldalt a -val, osszuk $MA \cdot MB \cdot MC \cdot \sin \alpha$ -val (ami $\neq 0$) és alkalmazzuk a szinusztételt:

$$(2) \quad \frac{abc}{MA \cdot MB \cdot MC} = \frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC}.$$

A jobb oldal tagjai pozitívak, ezért a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$(3) \quad \frac{1}{3} \left(\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{abc}{MA \cdot MB \cdot MC}},$$

és a jobb oldalon ráismerünk (2) bal oldalának köbgyökére. Mivel kisebb számnak a köbe kisebb, (2) és (3) alapján

$$\frac{1}{27} \left(\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} \right)^3 \geq \frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC}.$$

Másrészt nagyobb pozitív szám négyzetgyöke nagyobb, így (osztás után)

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} \right) \geq 1,$$

ami ekvivalens az (1)-beli állítással. Ezt akartuk igazolni.

Ezek szerint a feladat állítását finomítani kellene, pl. így: „hegyesszögű háromszögekre igazoljuk az (1) egyenlőtlenséget”.

II. hozzászólás. Élesebben határozhatjuk meg (1) érvényességi körét, ha a szögekkel kapcsolatos értelmezést adunk a bal oldal hányadosaira. A jelöléseket úgy választjuk, hogy $a \leq b \leq c$ legyen, így $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, tehát α és β mindenesetre hegyesszögek.

1986-03-104-4.eps

4. ábra

A CRB és ARM derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$\frac{CB}{AM} = \frac{a}{MA} = \frac{CR}{AR} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{ugyanígy} \quad \frac{b}{MB} = \operatorname{tg} \beta$$

és ha $\gamma < 90^\circ$ (I. eset, 3. ábra), akkor $c/MC = \operatorname{tg} \gamma$. Ha pedig $\gamma > 90^\circ$ (II. eset, 4. ábra), akkor az ABP , MCP háromszögpár hasonlóságából

$$\frac{c}{MC} = \frac{AB}{MC} = \frac{AP}{MP} = \operatorname{tg} PMA \angle = \operatorname{tg} (180^\circ - ACB \angle) = \operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

(ami egyébként $\operatorname{tg} \gamma$ abszolút értéke).

Ismeretes, hogy – a derékszögű háromszögek kivételével – minden háromszögben a szögek tangenseinek összege és szorzata egyenlő:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Az I. esetben mindhárom tangens pozitív, és fölismerjük, hogy a bal oldal az A számtani közepük 3-szorosa, a jobb oldal pedig a G mértani közepük köbe: $3A = G^3$. Ámde tudjuk, hogy $A \geq G$, így $A^3 \geq G^3 = 3A$, ebből $A \geq \sqrt[3]{3}$, ami azonos a kérdéses állítással, ha azt 3-mal osztjuk.

A II. esetben (1) így alakul

$$(4) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \geq 3\sqrt{3},$$

és akkor $\alpha + \beta < 90^\circ$, így a bal oldali tagok éppen növekvően vannak rendezve. Belátjuk, hogy a harmadik tag nagyobb, mint az első kettőnek az összege:

$$(5) \quad \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} > \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

Valóban, $\beta < 90^\circ - \alpha$ és így $0 < \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = 1$, tehát a nevezőre teljesül

$$0 < 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1.$$

Mármost (5) alapján *minden olyan (tompaszögű) háromszög ellenpélda* az állításra, amelyben

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} (\alpha + \beta) < 2\operatorname{tg} (\alpha + \beta) < 3\sqrt{3},$$

$$\alpha + \beta < \arctg \frac{3\sqrt{3}}{2} < 69^\circ (\approx 68,948\,275^\circ),$$

vagyis amelyben $\gamma > 111^\circ$ (radiánról mindjárt átszámítottuk fokra a szöget). Következő becslésünk alapján viszont olyan tompaszögű háromszögeket jellemezhetünk, amelyekre teljesül (1).

Bebizonyítjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \geq 2\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Legyen röviden $\alpha + \beta = x$, így $\beta = x - \alpha$, felhasználjuk továbbá, hogy

$$(7) \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

A bal és a jobb oldal különbségét így alakítjuk:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (x - \alpha) - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \operatorname{tg} \alpha + \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha} \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha \right). \end{aligned}$$

Mivel a zárójelbeli tört (7) szerint $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$, azért a zárójel $\left(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2 \geq 0$, másrészt a kiemelt tényező is pozitív. Ezzel bebizonyítottuk (6)-ot és azt is látjuk, hogy egyenlőség csak $\alpha = x/2 = \beta$ esetén áll be.

Ha tehát úgy választjuk $(\alpha + \beta)$ -t, hogy (4) helyén még az erősebb

$$2\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \geq 3\sqrt{3}$$

egyenlőtlenség is teljesüljön, akkor az ilyen háromszögekre érvényes az állítás. Táblázat használata nélkül belátható, hogy ez $\alpha + \beta \geq 75^\circ$ (azaz $\gamma \leq 105^\circ$) esetén mindig teljesül, ui. $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ és $\operatorname{tg} 37,5^\circ = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$, ezekkel a két oldal különbsége $2(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1) > 0$, hiszen $6 > (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + \sqrt{8}$, – továbbá a tangensfüggvény a $(0, 90^\circ)$ intervallumban monoton nő.

Tehát azt kaptuk, hogy a feladat állítása mindig teljesül, ha a háromszög legnagyobb szöge legfeljebb 105° (és nem derékszög), és biztosan nem teljesül, ha a legnagyobb szög legalább 112° .