I. megoldás. A négyszög D csúcsánál levő szöge nyilvánvalóan 60°. Így az ismert AD oldal végpontjainál levő szögek összege 138°, kisebb, mint 180°. Ezért az AB és DC félegyenesek metszik egymást egy M pontban és $AMD\sphericalangle=42^\circ$. Ez a szög egyben az ugyancsak adott BC oldalra támaszkodó BCM háromszögnek is alkotó része és ebben a további két szög $MBC\sphericalangle=60^\circ$ és $MCB\sphericalangle=78^\circ$. Ezekből kiszámíthatjuk M-nek mind a négy csúcstól való távolságát, majd alkalmas kivonással az AB és CD oldalakat. Elég lesz azonban pl. CD-t meghatározni, ezután már számíthatjuk az átlókat is.

1986-02-066-1.eps

1. ábra

1986-02-066-2.eps

2. ábra

A szinusztétel kétszeri alkalmazásával:

$$CD=MD-MC=\frac{AD\cdot\sin 78^\circ-CB\cdot\sin 60^\circ}{\sin 42^\circ}.$$

Ezt ismerve a koszinusztétel kétszeri alkalmazásával az átlókra:

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos 60^\circ$$

és

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos 102^\circ.$$

A számításokat végrehajtva

$$CD=71{,}50\text{ egység},\qquad AC=96{,}68\text{ egység},\qquad BD=109{,}20\text{ egység}.$$

Ezzel megadtuk a kívánt választ.

Megjegyzések. 1. Számos versenyző a föntinél jóval bonyolultabb számítás útján jutott eredményre. Küzdöttek azzal, hogy a négyszög keresett átlóit berajzolva, semelyik részháromszögben sincs 3 ismert méret – (lásd pl. a II. megoldást). – Így a *trigonometria* (az ún. „általános” háromszög kiszámítása) egyik ismert tételével sem lehet elindítani a számítást.

Visszagondolva ezirányú tanulmányainkra, lényegében így álltunk olyankor is, amikor *derékszögű* háromszögben már tudtunk számolni, és először kerültünk szembe nem-derékszögű háromszögre vonatkozó feladattal. Akkor valamelyik magasság (pl. m_c) berajzolásával két derékszögű háromszöget hoztunk létre, majd a „nem is kérdezett” közös oldalt két irányból kifejezve tételeket kaptunk: $m_c=m_c$-ből a szinusztételt, $m_c^2=m_c^2$-ből a koszinusztételt. Ezeket aztán *emlékezetünkbe* véstük, tétel-rangra emeltük, miután arról is meggyőződtünk, hogy derékszögnél nagyobb szögek mellett is érvényesek.

Itt is tovább lehet haladni hasonlóan. Aki újra és újra *négyszögszámítási* feladatokkal kerül szembe – például a geodézia (földmérés) alkalmazásaiban – , annak érdemes *tetragonometriai tétel*eket is keresnie és gyűjteményében őriznie. Az ilyen kapcsolatokban az várható, hogy a négyszögnek 6 mérete, adata forduljon elő, hiszen a négyszöget 5 adat határozza meg. Ez az egyszerű eset.

Példánkban az M segédpont és az ott keletkező szög, távolságok játszották az m_c előbbi segítő szerepét. Könnyű azonban egy általánosabb elvet is kiolvasni a CD-re kapott képletből. A négyszög szögeit sorra α, β, γ, δ betűvel jelölve, átrendezéssel a következő összefüggést kapjuk:

$$BC\cdot\sin\beta+CD\,\sin(\alpha+\delta)-DA\sin\alpha=0,$$

és a kiolvasható tétel: az AB oldalra merőleges egyenest e-vel jelölve, az $ABCD$ négyszög irányított kerületének mint vektor-poligonnak az e-re való vetülete nullvektor. Ebben az összefüggésben 3 oldal és 3 szög szerepel, közülük 5 ismert, CD kiszámítható. A 2. ábra szerinti $B'C'+C'D'-D'A'=0$ egyenletből számoltunk:

$$C'D'=CD\sin FCD\sphericalangle=CD\sin FCG\sphericalangle=CD\sin(360^\circ-\beta-\gamma)=CD\sin(\alpha+\delta).$$

Az irányított kerületnek a sík bármely egyenesére a vetülete 0, speciálisan az AB egyenesre való vetülete is – továbbra is a 2. ábrához ragaszkodva

$$AB-BC\cos\beta+CD\cos(\beta+\gamma)-DA\cos\alpha=0,$$

itt azonban 7 adat szerepel. Az e-re való vetítéskor az első tag elmarad. Ennek megfelelője háromszögben is megvan, 5 adat közti összefüggés: $AB=CB\cos\beta+CA\cos\alpha$.

Gyakorlati alkalmazásokban *zárt sokszög* helyett nyitott poligonok is szerepelnek – a *poligonometria* szótól sem ijednek meg. Nyitott poligonhoz utolsó tagként hozzá kapcsoljuk a végpontból a kezdőpontba vivő vektort.

2. Az 1. ábrán a négyszög megszerkesztését is vázoltuk, a lépések sorrendje: AB^* félegyenes, α, AD, δ felmérése, DM egyenes; B^*-ban β, majd $B^*C^*=BC$ és C^*-on át párhuzamos. (Több I. osztályos tanuló megjegyezte: „ezt csak szerkeszteni lehet".)

3. Nem volt lényeges az eddigiekben, hogy a példában húrnégyszögről van szó. Az alábbi megoldás ezt is használja „fogódzóként".

B. T.

II. megoldás. A négyszög húrnégyszög, mert szemben fekvő A, C csúcsainál levő szögeinek összege 180°, így a D-nél levő szög 60°.

1986-02-067-1.eps

3. ábra

Legyen a körülírt kör középpontja O, sugara r, az átlók O-ból vett látószöge $AOC\sphericalangle=2\cdot 60^\circ$, $BOD\sphericalangle=2\cdot 78^\circ$, és így az átlók

$$AC=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}\cdot r,$$
$$BD==2r\sin 78^\circ,$$

arányuk

$$\frac{AC}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 78^\circ}.$$

Az arány négyzetére még egy összefüggést kapunk, ha AC^2-re és BD^2-re felírjuk a koszinusztételt az ABC, ill. ABD háromszögből, az AB oldalt segédismeretlennek véve. Így másodfokú egyenletet kapunk AB-re:

$$\frac{AC^2}{BD^2}=\frac{AB^2+69^2-2\cdot 69\cdot AB\cdot\cos 120^\circ}{AB^2+110^2-2\cdot 110\cdot AB\cdot\cos 78^\circ}=\frac{3}{4\sin^2\ 78^\circ},$$

amiből elég nehéz számítással a pozitív gyök: $AB=41{,}50$. Ezt AC^2 és BD^2 fölírt kifejezéseibe helyettesítve ismét $AC=96{,}68$, $BD=109{,}20$ egység. – Mellesleg $r=55{,}9$.