

a) Ha x és y valamelyike nulla – például $x = 0$, akkor a vizsgált egyenlőség az $y^p = 0^p + y^p$ alakot ölti. Ha most $p \leq 0$, akkor 0^p nincs értelmezve, ha viszont $p > 0$, akkor a kapott egyenlőség minden nemnegatív y -ra értelmes és teljesül.

b) Ha x és y egyike sem nulla, akkor x , y és $x + y$ pozitív, és így x^p , y^p és $(x + y)^p$ minden p -re értelmes és természetesen pozitív. Ha mindkét oldalon osztunk $(x + y)^p$ -nel, akkor az

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^p + \left(\frac{y}{x+y}\right)^p = 1$$

egyenlőséghez jutunk.

Vezessük be az $u = \frac{x}{x+y}$ és a $v = \frac{y}{x+y}$ jelöléseket. Ekkor $u + v = 1$, továbbá u és v pozitív, 1-nél kisebb mennyiségek, tehát a $p \rightarrow u^p$ és a $p \rightarrow v^p$ szigorúan monoton csökkenő függvények. Ez azt jelenti, hogy

ha $p < 1$, akkor $u^p > u^1$, $v^p > v^1$, és így $u^p + v^p > u + v = 1$;

ha $p = 1$, akkor $u^p = u^1$, $v^p = v^1$, és így $u^p + v^p = u + v = 1$;

ha $p > 1$, akkor $u^p < u^1$, $v^p < v^1$, és így $u^p + v^p < u + v = 1$.

Azt kaptuk, hogy ha x és y egyike sem nulla, akkor $p \neq 1$ esetén nincs megoldás, míg ha $p = 1$, akkor bármely pozitív x , y számpárra fennáll az egyenlőség.

Összefoglalva: ha $p \leq 0$, akkor a feladatnak nincs megoldása; ha $p > 0$ és $p \neq 1$, akkor x és y egyike nulla, másika pedig tetszőleges nemnegatív szám, ha pedig $p = 1$, akkor mind x , mind pedig y tetszőleges nemnegatív szám lehet.

Megjegyzés. A megoldásból kiderül, hogy ha $x, y > 0$, akkor $x^p + y^p > (x + y)^p$, ha $p < 1$ és $x^p + y^p < (x + y)^p$, ha $p > 1$.