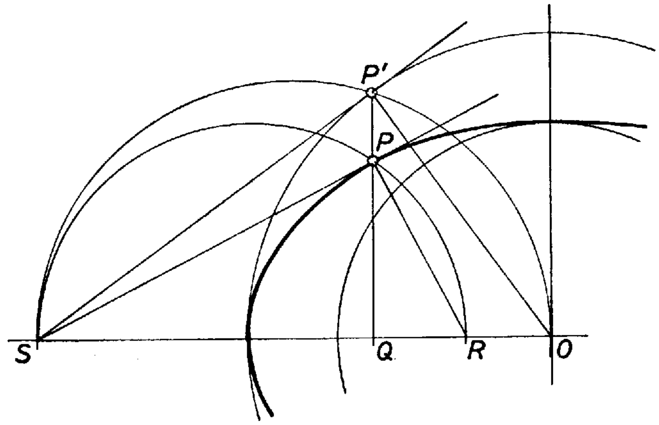
I. megoldás. Legyen az ellipszis kanonikus egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a P pont koordinátái pedig x_1 és y_1. Ekkor a további szereplő pontok koordinátái:

$$Q(x_1,\ 0),\quad R\left(\frac{x_1}{2},\ 0\right),\quad O(0,\ 0).$$



Mivel P az ellipszis pontja : $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$. Az ellipszis P pontjában húzott érintő egyenlete – mint ismeretes –

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1;$$

ennek normálvektora pedig $\mathbf{n}\left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2}\right)$. A feladat feltételei szerint $\overrightarrow{RP}$ merőleges erre az érintőre, emiatt $\overrightarrow{RP}\parallel\mathbf{n}$. Van tehát olyan λ valós szám, amelyre $\overrightarrow{RP}=\lambda\,\mathbf{n}$.

Mivel $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}$, azért $\overrightarrow{RP}=\frac{x_1}{2}\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}$, és így

$$\frac{x_1}{2}=\lambda\frac{x_1}{a^2}\quad\text{és}\quad y_1=\lambda\frac{y_1}{b^2}.$$

Kifejezve λ-t, kapjuk, hogy $\lambda=\frac{a^2}{2}$ és $\lambda=b^2$, így $a^2=2b^2$. Mivel a és b pozitív, ez azt jelenti, hogy $a=\sqrt{2}b$.

Eszerint valóban van olyan ellipszis, amelynek minden pontjára teljesül a feltevés – még nagytengelyének végpontjaira is –, és pedig minden ilyen ellipszis nagytengelye a kistengelynek a $\sqrt{2}$-szöröse. Ennek érdekes következménye, hogy a két fókusz távolsága éppen a kistengely hosszával egyenlő.

Minden lépésünk megfordítható, így ez a feltétel elégséges is.

II. megoldás. Rajzoljuk meg az O középpontú, félnagytengely sugarú kört! Az ellipszis ennek a körnek a képe merőleges affinitással, ha az affinitás tengelyének a nagytengely egyenesét választjuk. Legyen P' a P-nek megfelelő pont a körön. Az ebben a pontban húzott körérintő és a P-beli ellipszisérintő a nagytengely egyenesén metszik egymást egy S pontban.

Az SPR derékszögű háromszöget a PQ magasságvonal két hasonló háromszögre bontja, amelyek oldalaira igaz, hogy

$$PQ:SQ=RQ:PQ,\quad\text{vagyis}\quad PQ^2=SQ\cdot QR.$$

Ugyanígy az $SP'O$ derékszögű háromszögben :

$$P'Q:SQ=OQ:P'Q,$$

és mivel $OQ=2RQ$, így $P'Q^2=2SQ\cdot QR$. Összevetve:

$$P'Q^2=2PQ^2,\quad\text{vagyis}\quad\frac{PQ}{P'Q}=1/\sqrt{2},$$

az affinitás aránya tehát $1:\sqrt{2}$.

Mivel a kistengely épp a kör átmérőjének képe az affinitás során, a nagytengely pedig a kör átmérője, ebben az ellipszisben a nagytengely $\sqrt{2}$-ször akkora, mint a kistengely.