Az $xy = 1$ és $xy = -1$ egyenletű vonalak hiperbolák, közös aszimptotáik a koordináta-tengelyek. Másrészt szimmetriatengelyeik, az $y = x$ és $y = -x$ egyenesek is közösek, csak valós (fókuszos), ill. képzetes jellegük cserélődik fel. Ezekből következik, hogy a két görbe teljes képe megkapható az $xy = 1$ vonalnak az I. síknegyedbe eső $(x > 0,\ y > 0)$ pontjaiból (ívéből) a koordinátatengelyeken való tükrözéssel.

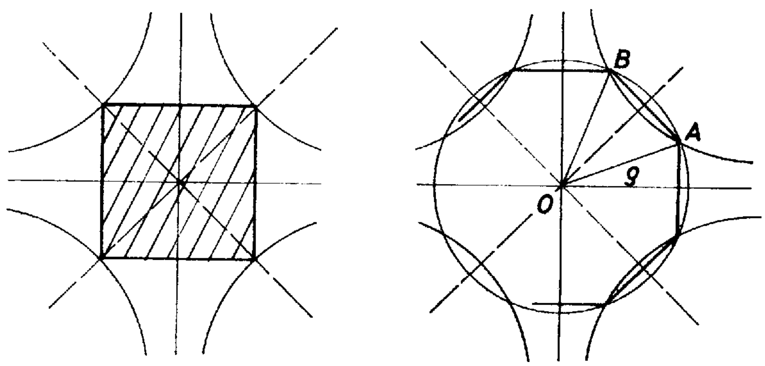
Ugyanez érvényes az origó körüli körökre is, ennélfogva elég vizsgálnunk az I. negyedben a hiperbolaív és negyedkör közös pontjait. Közös pontjaikra az

$$xy = 1, \qquad x^2 + y^2 = R^2, \qquad x > 0, \quad y > 0$$

rendszerből

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = R^2, \qquad x^4 - R^2x^2 + 1 = 0,$$
$$x^2 = \frac{1}{2}(R^2 \pm \sqrt{R^4 - 4}).$$

Csak 1 közös pont van, ha a diszkrimináns eltűnik : $R^4 = 4$, és ekkor $x = y = 1$, a vizsgálandó szabályos sokszög négyzet, oldala 2 egységnyi, területe 4, a mértékszám valóban egyenlő R^4-nel.



Ha két közös pont van, A és B, akkor a sokszög csúcsainak száma 8. Maga a sokszög akkor lesz szabályos, ha minden oldal látószöge a középpontból 45°, tehát ha pl. OA 22,5°-os szöget zár be az x tengellyel:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{45^\circ}{2} = \frac{\sin 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \ldots = \sqrt{2} - 1.$$

Összeszorozva ezt az $xy = 1$ egyenlettel: $y^2 = \sqrt{2} - 1$, majd meg elosztva vele: $x^2 = \sqrt{2} + 1$, és ezekből $R^2 = 2\sqrt{2}$, $R^4 = 8$.

Ekkor $x = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ megadja a szabályos nyolcszög beírt körének ϱ sugarát, amivel

$$t = 8 \cdot \frac{\varrho^2}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{8} = 4(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 8 = \mathrm{R}^4,$$

ebben az esetben is teljesül a feladat állítása.

Megjegyzés. Szemet szúr az eredményekben a 4-es kitevő az idom lineáris mérete, a körülírt kör sugara mellett. Mintha 4-dimenziós mennyiség lenne a terület!

Alapja: egy szabályos n-oldalú sokszögben a $t/R^2 = k$ hányados értéke $n = 4$ esetére $k = 2$, $n = 8$ esetére pedig $k = 2\sqrt{2}$. Az idomok eredetéből mármost az adódik, hogy a sugár négyzete mindkettőben éppen a fenti k-val egyenlő.

Köszönjük a feladat kitűzőjének ezt az érdekes észrevételt!