a) Bocsássuk előre, hogy a kérdéses egyenesek nem feltétlenül léteznek. Ha például $PA||BC$, akkor az A_2 pont és így az A_1A_2 egyenes nem jön létre. Az alábbiakban a síknak azokra a P pontjaira igazoljuk a feladat állítását, amelyekre a szóban forgó pontok és egyenesek léteznek. A P pontra nézve ez azt jelenti, hogy nem lehet az ABC háromszög csúcsain átmenő, a szemközti oldalakkal párhuzamos egyeneseken.

1985-12-451-1.eps

1. ábra

A megoldásban felhasználjuk Ceva tételét és annak megfordítását. A tétel és a megfordítás együtt azt mondja ki, hogy az ABC háromszög BC, CA és AB oldalegyenesein akkor és csak akkor olyan helyzetűek az A^*, B^* és C^* pontok, hogy az AA^*, BB^* és CC^* egyenesek egy ponton mennek át vagy pedig párhuzamosak, ha

$$AB^* \cdot CA^* \cdot BC^* = B^*C \cdot A^*B \cdot C^*A.$$

A fenti egyenlőségben a szereplő szakaszok előjeles hosszai értendők, oly módon például, hogy az oldalegyeneseken a BC, CA és az AB irányokat vesszük pozitívnak.

b) Rátérve a feladat megoldására, legyen az AP, BP, CP egyenesek metszéspontja az eredeti háromszög BC, AC és AB oldal egyenesével rendre A_3, B_3, ill. C_3. A feladat szövegének említett értelmezése szerint ezek a pontok létrejönnek, ugyanis az A_2, B_2 és C_2 pontok a P pontot a csúcsokkal összekötő egyenesek és a megfelelő oldalakkal párhuzamos középvonalak páronkénti metszéspontjai. Mivel AA_3, BB_3 és CC_3 egy ponton mennek át, így a Ceva-tétel megfordítása szerint:

$$\frac{AC_3}{C_3B} \cdot \frac{BA_3}{A_3C} \cdot \frac{CB_3}{B_3A} = 1. \tag{1}$$

A C középpontú, 2-szeres nagyítás a B_1A_1 szakaszt az AB szakaszba viszi át, így C_2 a CC_3 szakasz felezőpontja. Tehát C_2A_1 a BCC_3 háromszög középvonala, azaz $C_3B = 2C_2A_1$, hasonlóképpen $AC_3 = 2B_1C_1$, így $\frac{AC_3}{C_3B} = \frac{B_1C_2}{C_2A_1}$. Ugyanígy igazolható, hogy $\frac{AB_3}{B_3C} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1}$ és $\frac{BA_3}{A_3C} = \frac{C_1A_2}{A_2B_1}$. Ezeket (1)-be helyettesítve

$$\frac{B_1C_2}{C_2A_1} \cdot \frac{A_1B_2}{B_2C_1} \cdot \frac{C_1A_2}{A_2B_1} = 1.$$

Ebből pedig az $A_1B_1C_1$ háromszögre alkalmazott Ceva-tétel szerint valóban az következik, hogy a C_2C_1, B_2B_1 és A_2A_1 egy ponton mennek át vagy pedig párhuzamosak.

1985-12-451-2.eps

2. ábra

Nem írhatjuk át Ceva tételét az (1) szerinti hányados alakba, ha a nevezők valamelyike 0, pl. $C_3B = 0$ (2. ábra). Ekkor P a BC egyenesen van. Ilyenkor egyszerűbben adódik az állítás, a 3-as indexű pontok felhasználása nélkül. A példát folytatva B_2 és C_2 azonos A_1-gyel, és a kérdéses egyenesek közös pontja A_1.

Ha P nincs egyik oldalegyenesen sem, akkor A_2, B_2, C_2 egyike sem eshet egybe az A_1, B_1, C_1 pontok valamelyikével, így a Ceva-tétel minden esetben alkalmazható.

Ha pedig P-t az ABC háromszög valamelyik csúcsában választjuk, pl. C-ben, akkor a PC egyenes határozatlan, az állítás tárgytalan.

Megjegyzés. Ha a P pontnak csupán az ABC háromszög csúcsaiban történő fölvételét tiltjuk meg, tehát például megengedjük az $AP||BC$ esetet, akkor – bár az A_2 pont nem jön létre –, a feladat állítása igaz marad, ha az A_1A_2 egyenes szerepét ilyenkor a háromszög BC oldalegyenese veszi át.