

I. megoldás. Ha $f(x)$ jelöli az (1) bal oldalán álló polinomot, akkor tetszőleges $\alpha \neq 0$ -ra $f(x) = \alpha^6 \cdot f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, hiszen az f együttthatói „szimmetrikus” elrendezésűek. Mivel pedig (1)-nek nyilván nem gyöke a nulla, f -nek minden gyökével együtt annak reciproka is gyöke. A hat különböző gyök tehát az alábbi alakba írható: $\alpha, \beta, \gamma, 1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$. Ennek megfelelően f gyöktényezőss alakja:

$$(2) \quad f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \left(x - \frac{1}{\alpha}\right) \left(x - \frac{1}{\beta}\right) \left(x - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Számítsuk ki a jobb oldali szorzatban a harmadfokú tag együttthatóját! x^3 -ös tagot úgy kapunk a szorzat kifejtéséből, ha 3 zárójelből az első tagot, a többi 3-ból a másodikat vesszük. Ez $\binom{6}{3} = 20$ -féleképpen lehetséges. A kiválasztások egymással reciprok párokba kapcsolhatók, mint pl. az első és az utolsó 3 zárójelből valók:

$$-\alpha\beta\gamma \quad \text{és} \quad -\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

A többi 9 pár egyik szorzatában $2 + 1$, ill. $1 + 2$ tényező van $f(x)$ első, ill. második feléből, a párok első tagjait a kis táblázat szerint szerkeszthetjük meg.

	$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
$\alpha\beta$	β	α	$\alpha\beta/\gamma$
$\alpha\gamma$	γ	$\alpha\gamma/\beta$	α
$\beta\gamma$	$\beta\gamma/\alpha$	γ	β

Innen $c = c_1 + c_2$, ahol tehát

$$c_1 = -\left(\alpha\beta\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$$

és

$$c_2 = -\left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} + \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha\beta}\right).$$

$c_1 + c_2$ -ből $-\alpha\beta\gamma$ -t kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c &= -\alpha\beta\gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\beta\gamma} + \frac{2}{\alpha\gamma} + \frac{2}{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^2\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} + \frac{2}{\alpha^2\beta\gamma} + \frac{2}{\alpha\beta^2\gamma} + \frac{2}{\alpha\beta\gamma^2}\right) = \\ &= -\alpha\beta\gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Innen tehát

$$|c| = |\alpha\beta\gamma| \left| \left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right)^2\right) \right|,$$

és ha a második tényezőből elhagyjuk a háromtagú négyzeteket, akkor

$$|c| > |\alpha\beta\gamma| \cdot \left| 1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \right| = \left| \alpha\beta\gamma + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \right|.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\alpha\beta\gamma$ és $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ egyező előjelűek.)

Azt kaptuk tehát, hogy

$$|c| > \left| \alpha\beta\gamma + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \right|.$$

Felhasználva, hogy bármely t valós számra $\left| t + \frac{1}{t} \right| \geq 2$, a bizonyítandó állítást kapjuk abban az élesebb formában, hogy egyenlőség nem állhat fenn.

II. megoldás. Induljunk ki ismét a (2) alatti gyöktényezős felbontásból. Az első három tényezőt összeszorozva kapjuk, hogy

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - px^2 + qx - r,$$

ahol

$$p = \alpha + \beta + \gamma, \quad q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \quad \text{és} \quad r = \alpha\beta\gamma.$$

Hasonlóan a második három tényező szorzatára $x^3 - Px^2 + Qx + R$ adódik, ahol

$$P = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \quad Q = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Vegyük észre, hogy

$$P = \frac{q}{r}, \quad Q = \frac{p}{r} \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{r};$$

tehát

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right) \left(x - \frac{1}{\beta}\right) \left(x - \frac{1}{\gamma}\right) = x^3 - \frac{q}{r}x^2 + \frac{p}{r}x - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}(rx^3 - qx^2 + px - 1).$$

Eszerint $f(x) = \frac{1}{r}(x^3 - px^2 + qx - r)(rx^3 - qx^2 + px - 1)$. A harmadfokú tag együtthatójára innen

$$c = -\frac{1}{r}(p^2 + q^2 + r^2 + 1)$$

adódik.

Ennek alapján $|c| = \frac{1}{|r|}(p^2 + q^2 + r^2 + 1) \geq \frac{1}{|r|}(r^2 + 1) = |r| + \frac{1}{|r|} \geq 2$, ahogyan állítottuk.

Megjegyzések. 1. A második megoldás általánosítható. Könnyen megmutatható, hogy ha

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

akkor

$$\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right) \left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right) \dots \left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{1}{a_0}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1),$$

és a két polinom szorzatában az n -edfokú tag együtthatója $\frac{1}{a_0}(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1)$. Mivel ennek a számnak legalább 2 az abszolút értéke, ezért ha egy $2n$ -edfokú polinom főegyütthatója 1, a polinomnak $2n$ gyöke van, és minden gyök reciproka is gyök, akkor az n -edfokú tag együtthatójának abszolút értéke legalább 2.

Másfelől a „szimmetrikus”

$$(3) \quad x^{2n} + b_1x^{2n-1} + b_2x^{2n-2} + \dots + b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + 1 = 0$$

polinom az első megoldásban látottak szerint rendelkezik a gyökökre vonatkozó fenti tulajdonsággal, így $|b_n| \geq 2$.

2. A megadott feltételek mellett (1)-ben $c > 4$ is igaz, ez az eredmény azonban már nem élesíthető.