1. Jelölje R és r rendre az adott sugarakat és $2s$ a kerületet. Az adathármast szimmetrikusnak mondhatjuk abból a szempontból, hogy egyik oldal vagy szög sincs kitüntetve a többiekkel szemben. Ha tehát valahogyan kapnánk egy egyenletet pl. valamelyik oldalra, annak a további két oldalra éppúgy teljesülnie kellene, így legalább harmadfokúnak kellene lennie. Más kilátás hiányában ilyet keresünk.

1985-11-379-1.eps

Ismeretesek a $4Rt = abc$ és $t = rs$ összefüggések, ahol t a terület. Mindkettő „szimmetrikus" a, b, c-ben és ilyen a Heron-féle területképlet is: $t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Ez a három összefüggés elegendő lesz annak a harmadfokú egyenletnek a felírásához, amelynek a gyökei a, b, c. Ezek ismeretében térünk majd rá a szögek kiszámítására.

Az egyenlet gyöktényezős alakját kifejtjük:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc = 0,$$

itt máris ismerjük az első és a harmadik együtthatót: $abc = 4Rt = 4Rrs$. A második együtthatót is megkapjuk a Heron-képlet kifejtéséből

$$t^2 = r^2s^2 = s\big(s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ac)s - abc\big),$$

ahonnan

$$ab + bc + ca = \frac{1}{s}(r^2s - s^3 + 2s^3 + abc) = r^2 + s^2 + 4Rr,$$

tehát az egyenlet:

$$x^3 - 2sx^2 + (r^2 + s^2 + 4Rr)x - 4Rrs = 0,$$

számadatainkkal

$$x^3 - 416x^2 + 51\,568x - 1\,697\,280 = 0.$$

2. Próbáljuk meg, van-e egész gyöke az egyenletnek. Ez csak az x-től mentes tag osztója lehet, hiszen az első három tag osztható x-szel. Törzsszámhatványok szorzatára felbontva $1\,697\,280 = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$. Próbálkozzunk ennek $2^5 = 32$ és $2^6 = 64$ osztóival: Jelöljük az egyenlet bal oldalát $P(x)$-szel, így $P(32) = -440\,320 < 0$ és $P(64) = +161\,280 > 0$. Ezek ellentétes előjelűek, másrészt $P(x)$ folytonos függvény, ezért van 0-helye a $(32, 64)$ intervallumban. Éspedig a -440 ezer és $+161$ ezer „hibák" nagyságviszonya alapján várhatóan közelebb a 64-hez. Ilyen osztói az x-től mentes tagnak: $3 \cdot 17 = 51$ és $2^2 \cdot 13 = 52$. Valóban $P(52) = 0$, tehát $x_1 = 52$.

A további két gyök összege: $x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 52 = 416 - 52 = 364$, szorzatuk: $x_2x_3 = x_1x_2x_3 : x_1 = x_1x_2x_3 : 2^2 \cdot 13 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 32\,640$, tehát a további két oldal a következő másodfokú egyenlet gyöke:

$$x^2 - 364x + 32\ 640 = 0, \quad x_2 = 160, \quad x_3 = 204.$$

Tehát a háromszög oldalai $a = 52$, $b = 160$, $c = 204$. Ebben a háromszögben R, r és a kerület valóban egyenlő az előírt méretekkel.

3. Kiszámítjuk a két kisebb oldallal szemben fekvő szögeket, amelyek biztosan hegyesszögek:

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{52}{340}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R} = \frac{160}{340},$$
$$\alpha = 8^\circ 47{,}8', \qquad \beta = 28^\circ 4{,}4' \quad \text{végül } \gamma = 143^\circ 7{,}8'.$$

Megjegyzés. Kisebb számokkal dolgozhatunk, ha a, b, c helyett a beírt kör $s-a$, $s-b$, $s-c$ érintőszakaszaira írunk fel harmadfokú egyenletet. Ezekre a gyökök szimmetrikus kifejezései:

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) = s,$$
$$(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) = 3s^2 - s\cdot 4s + (ab+ac+bc) = r^2 + 4Rr,$$
$$(s-a)(s-b)(s-c) = t^2/s = r^2s,$$

ezek tehát a következő egyenlet gyökei:

$$z^3 - sz^2 + (r^2 + 4Rr)z - r^2s = 0.$$

Számadatainkkal $z^3 - 208z^2 + 8304z - 29\,952 = 0$, és mivel $2s$ páros szám, ugyanolyan eséllyel remélhetjük, hogy $s-a, \ldots$ is egészek, mint a föntebbi próbálkozásban. Innen $z_1 = 156$, $z_2 = 48$, $z_3 = 4$ útján $a = 208 - 156 = 52$-re és tovább az előbbi eredményekre jutunk.