I. megoldás. A háromszögekben szokásos jelölésekkel a szögfelező osztási aránya alapján

$$BD = a \cdot \frac{c}{b+c}, \quad BF = c \cdot \frac{a}{a+b},$$

így a BDF háromszög területe:

$$\frac{1}{2} BD \cdot BF \cdot \sin\beta = \frac{a^2c^2 \sin\beta}{2(a+b)(b+c)},$$

és a BDF, ABC háromszögek területének aránya:

$$(1) \qquad \frac{a^2c^2 \sin\beta}{2(a+b)(b+c)} : \frac{ac \sin\beta}{2} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}.$$

1985-11-376-1.eps

Ugyanígy az AEF és CDE háromszögek területének az eredeti háromszög területéhez való aránya

$$\frac{cb}{(c+a)(a+b)}, \quad \frac{ba}{(b+c)(c+a)},$$

ennélfogva a DEF, ABC területek aránya, mindjárt tovább alakítva

$$(2) \qquad 1 - \left(\frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{cb}{(c+a)(a+b)} + \frac{ba}{(b+c)(c+a)} \right) = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

(egyetlen nevező sem válhat zérussá).

Mármost a kívánt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha (2) és (1) kifejezések egyenlők. Ebből egyszerűsítéssel

$$\frac{2b}{c+a} = 1, \quad \text{azaz ha} \quad b = \frac{a+c}{2}.$$

Szavakban: ha a követelményben kitüntetett szerepet játszó B csúccsal szemben fekvő b oldal a másik kettőnek számtani közepe, más szóval, ha az a, b, c oldalak ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnak.

Csermely Ágnes (Veszprém, Lovassy L. Gimn., IV. o. t.)

A következő megoldásban a számítások mellett némi geometriai szemlélődés is van.

II. megoldás. Közös DF alapjukra tekintettel a kérdéses háromszögek területe akkor és csak akkor egyenlő, ha a B, E pontoknak a DF egyenestől mért távolságai egyenlők. Ez a feltétel ekvivalens a következővel: párhuzamost húzva E-n át DF-fel, ez a BC, BA félegyeneseket azokban a D_1, F_1 pontokban metszi, amelyekre $BD_1 = 2 \cdot BD$ ill. $BF_1 = 2 \cdot BF$.

Tekintsük tehát ezt a két pontot, továbbá a D_1F_1 egyenesnek AC-vel való U metszéspontját, és keressük annak a feltételét, hogy U essék egybe E-vel. Egyelőre föltesszük, hogy D_1 nem azonos C-vel – amiből nyilvánvalóan $AB \neq AC$ – és F_1 nem azonos A-val, tehát $CB \neq BA$. Az U pont akkor és csak akkor keletkezik C és A között, ha D_1 és F_1 az AC egyenes két különböző partján fekszik.

1. Válasszuk úgy a betűzést, hogy $BD_1 = 2BD > AC$, és $BF_1 = 2BF < BA$ legyen. Ekkor $BD > CD$ miatt – a szögfelező osztásaránya alapján – $BA > CA$, másrészt $BF < AF$ folytán $BC < CA$, tehát CA a nagyságra nézve középső oldal.

Az UCD_1 és UAF_1 háromszögekből

$$\sin CUD_1\sphericalangle = \frac{CD_1}{CU} \sin CD_1U\sphericalangle = \frac{CD_1}{CU} \sin BDF\sphericalangle,$$

és

$$\sin CUD_1\sphericalangle = \sin AUF_1\sphericalangle = \frac{AF_1}{AU} \sin AF_1U\sphericalangle = \frac{AF_1}{AU} \sin BFD\sphericalangle,$$

tehát hányadosuk

$$(3) \qquad \frac{CD_1}{AF_1} \cdot \frac{AU}{CU} \cdot \frac{\sin BDF\sphericalangle}{\sin BFD\sphericalangle} = 1.$$

Ámde ismét az osztásarány alapján

$$\frac{\sin BDF\sphericalangle}{\sin BFD\sphericalangle} = \frac{BF}{BD} = \frac{ac}{a+b} : \frac{ca}{c+b} = \frac{b+c}{b+a},$$