I. megoldás. Próbáljunk jelentést tulajdonítani az egyenlőség két oldalán álló mennyiségeknek! Tekintsük ehhez az n hosszúságú 0–1 sorozatokat. Azoknak a sorozatoknak a száma, amelyek pontosan j darab 1-est tartalmaznak, éppen $\binom{n}{j}$, az 1-esek helyét ugyanis ennyiféleképpen választhatjuk meg. Az egyenlőség bal oldalán eszerint azoknak az n hosszúságú 0–1 sorozatoknak a száma áll, amelyek pontosan $0, 1, 2, \ldots, k$ darab azaz legfeljebb k darab 1-est tartalmaznak.

Vegyük most szemügyre a jobb oldalon álló összeg egy tagját. Az első tényező, $\binom{n-1-j}{k-j}$ azoknak az $n-1-j$ hosszúságú 0–1 sorozatoknak a száma, amelyek $k-j$ darab 1-est tartalmaznak. Ami a második tényezőt illeti, összesen 2^j darab j hosszúságú 0–1 sorozat van. A szorzat így azoknak az $n-1$ hosszúságú 0–1 sorozatoknak a száma, amelyekben az első $n-1-j$ helyen éppen $k-j$ darab 1-es fordul elő. Ha minden egyes ilyen sorozatban az $(n-j)$-edik helyre egy 0-t illesztünk, akkor olyan, most már n hosszúságú sorozatokat kapunk, amelyekben legfeljebb k darab 1-es van, az első $n-1-j$ elem között pontosan $k-j$, az utolsó j elem között pedig legfeljebb j. Az utólag beillesztett 0 pedig éppen az $(n-k)$-adik 0 a sorozatban.

Csoportosítsuk tehát aszerint a legfeljebb k darab 1-est – és így legalább $n-k$ darab 0-t – tartalmazó n hosszúságú 0–1 sorozatokat, hogy az $n-k$-adik 0 hányadik helyen fordul elő a sorozatban. Ennek a 0-nak a pozíciója $(n-k)$-tól n-ig változhat, tekintsük azt az esetet, amikor ez épp az $(n-j)$-edik elem $(0 \le j \le k)$. Ekkor az ezt a 0-t megelőző $n-j-1$ elem között $n-k-1$ darab 0 és így $k-j$ darab 1-es van, az utolsó j elem mindegyike lehet 0 vagy 1, az ilyen sorozatok száma tehát valóban $\binom{n-1-j}{k-j} \cdot 2^j$. Így az összes olyan 0–1 sorozatok száma, amelyek legfeljebb k darab 1-est tartalmaznak, valóban

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} \cdot 2^j$$

II. megoldás. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Ha $k=0$, akkor a bizonyítandó egyenlőség minden n-re az $1=1$ alakot ölti, ha pedig $k=n-1$, akkor ugyancsak minden n-re a bal oldal

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} = 2^n - 1,$$

a jobb oldal pedig

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1-j}{n-1-j} \cdot 2^j = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^n - 1,$$

az állítás tehát minden n-re igaz, ha $k=0$ vagy $k=n-1$. Innen következik, hogy $n=1$ és $n=2$ esetekben fennáll (1).

Tegyük most fel, hogy $1 \le k \le n-1$ és az állítás $n-1$-re igaz. Ekkor az $(n-1, k)$ és az $(n-1, k-1)$ párokra értelmes és igaz az (1) egyenlőség, azaz

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n-1}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-2-j}{k-j} \cdot 2^j, \quad \text{és} \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-2-j}{k-j-1} \cdot 2^j. \tag{3}$$

A (3) összefüggés bal oldala $\sum_{j=1}^{k} \binom{n-1}{j-1}$ alakban is írható. Ha összeadjuk a két egyenlőséget, és felhasználjuk az $\binom{m}{0} = 1$, illetve az $\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} = \binom{m+1}{r}$ összefüggéseket, akkor éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés. A legtöbb megoldás k-ra vonatkozó teljes indukciót használt. Volt, aki észrevette, hogy az $f(n, k) + f(n, k+1) = f(n+1, k+1)$ összefüggés fennáll az (1) két oldalán szereplő mennyiségekre és így a kezdeti értékek egyenlőségéből következik az állítás.