I. megoldás. Ha f konstans függvény, akkor eleget tesz a feladat követelményének. Belátjuk, hogy más függvényre nem teljesül (1). Legyen ugyanis f a feladat követelményét teljesítő függvény, és legyen $a < b$. Osszuk fel az $[a, b)$ intervallumot n egyenlő részre: $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, ..., $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$, ..., $x_n = b$. Ekkor

$$|f(b) - f(a)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i)\right| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{2}$$

(Itt felhasználtuk, hogy f minden valós számra értelmezve van, továbbá az abszolút értékekre vonatkozó $|c_1 + \ldots + c_n| \leqq |c_1| + \ldots + |c_n|$ egyenlőtlenséget.)

A feltétel szerint

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqq (x_{i+1} - x_i)^2 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$-re. Ezt (2)-be beírva

$$0 \leqq |f(b) - f(a)| \leqq n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Mivel a kapott egyenlőtlenség minden n-re fennáll, $|f(b) - f(a)|$ nem lehet pozitív. Így $f(b) = f(a)$.

a és b tetszőleges volt. Így az f függvény értéke bármely két helyen megegyezik, tehát f valóban konstans, ahogyan állítottuk.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat kikötésének eleget tevő bármely f függvény mindenütt deriválható, és deriváltja azonosan nulla. Ugyanis a kikötés

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqq |x - y|$$

alakban írható. Ez tehát minden x, y-ra teljesül. Ha most x-et rögzítjük és y tart x-hez, akkor a jobb oldal nullához tart. A bal oldal nem negatív, tehát annak is nulla a határértéke. Azt kaptuk, hogy tetszőleges rögzített x-re

$$\lim_{x \to y}\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = 0,$$

s innen

$$f'(x) = \lim_{y \to x}\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0,$$

ahogy állítottuk.

Ismert tétel, hogy ha egy függvény mindenütt differenciálható, és differenciálhányadosa mindenütt nulla, akkor a függvény konstans. A feladat feltételének eszerint csak a konstans függvények tehetnek eleget, ezek pedig nyilván eleget is tesznek.

Megjegyzések. 1. A szereplő egyenlőtlenség helyett elég volna megkövetelni minden x, y számpárra az

$$|f(x) - f(y)| \leqq (x - y)^{1+\varepsilon}$$

egyenlőtlenséget, ahol $\varepsilon > 0$, rögzített szám. Mindkét megoldás ugyanígy elmondható ebben az esetben is. A megoldásokban csak annyit használunk ki, hogy (1) jobb oldalán $(x - y)$-nak olyan g függvénye áll, amelyre

$$\lim_{t \to 0}\frac{g(t)}{t} = 0.$$

2. Az első megoldás akkor is elmondható, ha f-ről csak annyit teszünk fel, hogy *egy* adott y érték mellett tetszőleges x-re teljesül (1).