

Legyenek a csonkakúp alapköreinek sugarai R és r ($R > r$), síkjaik távolsága, a magasság m , ez egyben a beírt félgömb sugara is.

1985-11-372-1.eps

A forgástengelyen átmenő bármely sík a csonkakúpból szimmetrikus trapézt, a félgömbből fél főkört metsz ki, és az utóbbi érinti a trapéz szárait. Az ábra jelölései mellett az OAE és BAD derékszögű háromszögek egybevágók, $AE = AD = R - r$, továbbá az érintések folytán $BE = BC = r$, így a csonkakúp oldalvonala $AB = R$, tehát

$$m^2 = R^2 - (R - r)^2 = 2Rr - r^2.$$

A térfogatok arányából viszont

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{3}m^3 &= \frac{6}{7} \cdot \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) \quad (m \neq 0), \\ 3(R^2 + Rr + r^2) &= 7m^2 = 14Rr - 7r^2, \\ 3R^2 - 11Rr + 10r^2 &= 0,\end{aligned}$$

amiből R/r értékére két pozitív számot kapunk:

$$\frac{R}{r} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{R}{r} = \frac{5}{3}.$$

Mivel számításaink visszafelé is elvégezhetők, a kétféle csonkakúp meg is felel az adatoknak, $R = 2r$, valamint $R = 5r/3$ mellett, a félgömb sugara pedig

$$m = \sqrt{3}r, \quad \text{ill} \quad \sqrt{7/3}r.$$

A palást és a félgömb felszíneinek arányára a kétféle méretezés szerint a megfelelő képletekbe való behelyettesítés útján 1, ill. 20/21 adódik.