1. A két háromszög súlyvonalainak egyenesei páronként egybeesnek, ennélfogva közös a súlypontjuk is. Valóban, az ABC háromszög egyik súlyvonala AA_0, és ez átmegy a B_0C_0 szakasz felezőpontján, hiszen az $A_0B_0AC_0$ négyszög paralelogramma. Jelöljük a közös súlypontot S-sel.

A súlypont harmadoló tulajdonságánál fogva a két háromszög S-re mint középpontra nézve hasonló egymáshoz. Ennélfogva a K és K_0 megfelelő pontpárjuk is képe egymásnak, így az ABC háromszög területét felező KK_0 egyenes átmegy S-en. Megmutatjuk, hogy KK_0 ***a két háromszög egy megfelelő csúcspárján is átmegy, vagyis azonos valamelyik közös súlyvonal egyenessel.***

2. Válasszuk úgy a betűzést, hogy az A és C csúcsok a KK_0 egyenes két partján legyenek, és az egyenesnek az AC oldallal közös E pontjára – a „belépési" pontra – teljesüljön $EC \leqq EA$. Eszerint E a CB_0 szakaszon van, megengedve ennek B_0 végpontját is, de C-t nem.

1985-11-371-1.eps

Ekkor a KK_0 egyenes a háromszögből csak a BA szakasz valamely F pontján át léphet ki – megengedve B-t is. Ugyanis a CB szakasz tetszőleges belső X pontját gondolva kilépési pontnak, a CXE háromszög területe legfeljebb annyi lenne, mint a CBB_0 háromszög területe, – ami pedig fele az ABC háromszög területének. Ezt a korlátot is csak akkor érné el, ha egyidejűen E azonos lenne B_0-lal és X azonos B-vel, ekkor pedig nyilvánvalóan teljesül az állítás.

Már csak az $EC < EA$ nagyságviszonnyal kell foglalkoznunk. Ekkor $FA > FB$, hiszen egyébként a CC_0A terület nagyobb lenne az EFA területnél, márpedig mindkettő a háromszög területének a fele.

Hagyjuk figyelmen kívül az egyenlő területű FEA és C_0CA háromszögek közös részét, az AC_0SE idomot, ekkor a maradó FSC_0 és ESC valódi háromszögek területe is egyenlő. S-nél levő szögük egyenlő, ennélfogva a $t = \frac{1}{2}bc \sin\alpha$ típusú területképlet alapján az S-ben összefutó oldalszakaszaik szorzata egyenlő: $SF \cdot SC_0 = SC \cdot SE$. Innen a súlypont harmadoló tulajdonsága alapján:

$$SF = \frac{SC}{SC_0} \cdot SE = 2SE, \quad \text{ebből} \quad FE = FS + SE = 3SE.$$

Eszerint F-nek az AC egyenestől mért távolsága 3-szor akkora, mint S távolsága, vagyis éppen akkora, mint B távolsága. Az AB egyenesen csak egy ilyen pont van: B, csak ide eshet F, tehát E a B_0-ba. A KK_0 egyenes azonos a BB_0 súlyvonallal.

Így a feladat föltevései alapján a már előbb elintézett nyilvánvaló esetre jutottunk; más eset nincs, és ezzel (a dőlt betűs) állításunkat bebizonyítottuk.

3. A választott betűzés szerint a KK_0 egyenes átmegy a B_0 oldalfelező ponton. Ez nyilván minden olyan háromszögben teljesül, amelyben K azonos B_0-lal, vagyis minden derékszögű háromszögben ($ABC\sphericalangle = 90°$), amikor persze az $A_0B_0C_0$ háromszög is derékszögű. (K_0 nem lehet azonos B_0-lal.) Továbbá azok a háromszögek is a vizsgálandók közé tartoznak, amelyekben a K körközéppont nem azonos B_0-lal, de rajta van a BB_0 súlyvonalon. Mindezekben BB_0 a körnek és vele együtt a háromszögnek is szimmetriatengelye, vagyis az egyenlő szárú ($BA = BC$) háromszögek is megfelelnek, és más lehetőség már nincs. – A szabályos háromszöget nyilván azért zárta ki eleve a feltevés, mert abban K_0 azonos K-val, a KK_0 egyenes határozatlan.

Válaszunk tehát a következő: az ABC háromszög vagy derékszögű vagy egyenlő szárú – esetleg mindkét feltételnek eleget tesz. És hozzátesszük: a KK_0 egyenes természetesen az $A_0B_0C_0$ háromszöget is két egyenlő területű részre osztja.