1. A p, q, s paraméterek rögzített előjeléből könnyű látni, hogy Q kívül van a parabolán, és rajta van ennek t tengelyén, az adott e egyenes pedig metszi a parabolát és merőleges t-re. Nincs a feladatnak olyan megoldása, amelyben a kérdéses $M_i(x_i, y_i)$, $i=1,2$ metszéspontok az adott e egyenesnek ugyanazon a partján lennének, hiszen akkor az M_1M_2 egyenes párhuzamos volna e-vel és merőleges t-re, emellett átmenne Q-n, így pedig nem metszhetné a parabolát, ellentmondásra jutnánk. Eszerint e elválasztja M_1-et M_2-től, és az M_1M_2 szakasz N felezőpontja nyilván rajta van e-n.

1985-11-369-1.eps

Legyen a keresett szelő iránytangense m (nyilván $\neq 0$), ekkor egyenlete $y=m(x-q)$. A két vonal egyenletéből az x_i abszcisszákra

(1)
$$m^2(x-q)^2=2px,$$
$$x^2-2\left(\frac{p}{m^2}+q\right)x+q^2=0,$$

továbbá mivel N az e-n van,

(2)
$$\frac{x_1+x_2}{2}=s.$$

Mindjárt magából az (1)-ből korlátozás olvasható ki m-re (vagyis már a p, q paraméter párból). Ahhoz, hogy M_1 és M_2 egyáltalán létrejöhessenek, a diszkrimináns 1/4 részére teljesülnie kell:

$$\left(\frac{p}{m^2}+q\right)^2-q^2=\frac{p}{m^2}\left(\frac{p}{m^2}+2q\right)\geqq 0,$$

azaz

(3)
$$\frac{p}{m^2}+2q\geqq 0,\quad |m|\leqq\sqrt{\frac{p}{-2q}}.$$

Ez eleve szükséges feltétel ahhoz, hogy az (1) és (2) *egyidejű* figyelembevételével kiszámítandó iránytangens megfelelhessen a feladat követelményének. (Egyenlőség esetén a két metszéspont egybeesik, az $y=\pm m(x-q)$ egyenesek érintik a parabolát.)

Az iránytangens meghatározásában mellőzhetjük x_1 és x_2 kiszámítását, hiszen a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések alapján

$$x_1+x_2=2\left(q+\frac{p}{m^2}\right),$$

tehát (2) figyelembevételével

$$\frac{p}{m^2}+q=s$$

amiből

(4)
$$|m|=\sqrt{\frac{p}{s-q}}.$$

Erre akkor teljesül (3) is, ha $s-q\geqq -2q$, azaz $s\geqq -q$ (>0), vagyis ha $OE\geqq QO$ – ahol E az x tengely és e közös pontja –, tehát ha az e egyenes legalább annyira van O-tól, mint a Q pont. Ha éppen $s=-q$, akkor (4) és (3) szerint éppen a két érintő felel meg a követelményeknek, M_1, M_2 és N egybeesik az előírt e egyenesen.

2. A szelőt N pontjának kitűzésével szerkesztjük meg. Ordinátájának abszolút értéke: $EN=|y|=|m|\cdot(s-q)=\sqrt{p(s-q)}=\sqrt{p\cdot QE}$. Legyen a parabola fókusza F – ez a parabolával együtt adottnak tekintendő –, ekkor $OF=p/2$. Mérjük fel E-től QE meghosszabbítására az $EG=2\cdot OF=p$ szakaszt és messük e-t a QG átmérőjű körrel. Ekkor a derékszögű háromszög középarányos tételei szerint a metszéspont N. Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Érdekes meglátásokra jutunk, ha a szelőt valamelyik M_i alapján próbáljuk megközelíteni, vagyis az x_i, y_i koordinátáin át. Az x_i abszcisszákra (1)-ből, (2) figyelembevételével

(1a)
$$x^2-2sx+q^2=0.$$

Szerkesztésükhöz vegyük O tükörképét E-re nézve, legyen ez H, akkor $OH=2s=x_1+x_2$, másrészt forgassuk el Q-t O körül derékszöggel a K pontba, vagyis $OK=|q|=\sqrt{x_1x_2}$. Ezek alapján az OH átmérő fölötti Thalész-kör és a K-n átmenő, az x-tengellyel párhuzamos egyenes K_1, K_2 metszéspontjainak abszcisszái x_1 és x_2. K_i létezésének feltétele ebből ismét $|q|\leqq s$.

Gondolhatnánk: már csak ez van hátra: M_i-t kimetszhetjük a parabolából a K_i-n átmenő és az x tengelyre merőleges e_i egyenessel. Ámde adott parabola és adott egyenes esetében metszéspontjuk „leolvasása” elvileg egészen más feladat, mint pl. adott kör és adott egyenes esetében! A parabolából – egyenlete alapján – tetszés szerinti számú pontot szerkeszthetünk ugyan, de csak véges számút. A parabolaív csupán olyasféle *összekötése* pontoknak, mint egy függvénygrafikon. Annyiból talán mégis több, hogy tetszőleges – most x_i – abszcisszájú pontját egyformán szerkeszthetjük a *definíció* alapján.

Legyen F tükörképe O-ra D, itt megy át a d vezéregyenes; és legyen K_i vetülete az x tengelyre K_i' Ekkor M_i-nek F-től való távolsága annyi, mint d-től, azaz DK_i, tehát M_i kimetszhető e_i-ből az F körüli $DK_i' = x_i + p/2$ sugarú körrel. – Lehetne x_i alapján (ismét mértani középarányos útján) az $y_i = \sqrt{2px_i}$ hosszúságot is szerkeszteni: x_i végpontjától jobbra felmérve a $2p$ szakaszt stb.

2. Mivel a K_i pontokat (1a)-ból csak s és $|q|$ felhasználásával megszerkeszthettük, vagyis p felhasználása nélkül, azért ezt is mondhatjuk: K_i az adott s, q paraméterpárból ($s \geqq |q|$ esetén) *minden* $p > 0$ értékhez előkészíti a szerkesztést. Az adott p-t csak a második lépésben használjuk.