

Tegyük fel, hogy valamely  $x > 1$  valós szám megoldása az (1) egyenletnek. Alakítsuk át egyenletünket :

$$\begin{aligned}
 0 = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= a_0(x^n - x^{n-1}) + \\
 &+ (a_0 + a_1)(x^{n-1} - x^{n-2}) + \dots \\
 &\quad \vdots \\
 &+ (a_0 + a_1 + \dots + a_j)(x^{n-j} - x^{n-j-1}) + \\
 &\quad \vdots \\
 &+ (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})(x - 1) + \\
 &+ (a_0 + a_1 + \dots + a_n).
 \end{aligned}$$

Itt az összes  $a_0 + a_1 + \dots + a_j$  alakú összeg nem negatív, másrészt  $x > 1$  miatt  $x^{n-j} > x^{n-j-1}$ , így  $x^{n-j} - x^{n-j-1}$  pozitív. A jobb oldalon tehát minden sor nem negatív. Összegük csak úgy lehet nulla, ha minden sor nulla. Ehhez azonban az szükséges, hogy minden  $a_0 + a_1 + \dots + a_j$  összeg nulla legyen (hiszen  $x^{n-j} - x^{n-j-1} > 0$ ), ami pontosan akkor teljesül, ha minden  $a_i$  nulla. Az (1) egyenletnek tehát csak akkor lehet 1-nél nagyobb valós megoldása, ha minden  $a_i$  együttható nulla, ekkor azonban az (1) egyenlet azonosság.

*Megjegyzés.* Egynél jobb alsó korlát nem adható: ha  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 1$  és  $a_n = -n$ , akkor az (1) egyenlet  $x^n + x^{n-1} + \dots + x - n = 0$  alakú. Ennek megoldása az  $x = 1$ , és mivel  $a_0 + \dots + a_j = j > 0$ , ha  $j \leq n - 1$ , továbbá  $a_0 + \dots + a_n = 0$ , a feladat feltételei teljesülnek.