Legyen $AOB\sphericalangle=\beta(<90^\circ)$, $AOC\sphericalangle=DOB\sphericalangle=\alpha\ \ (0<\alpha<\beta)$, ekkor

$$e_1=r\ \mathrm{tg}\,\beta,\ e_2=r\ \mathrm{tg}\,\alpha\quad \text{és}\quad e_3=r\ \mathrm{tg}\,(\beta-\alpha),$$

ahol r a kör sugara.

1985-11-367-1.eps

Így a vizsgálandó kifejezés:

$$\frac{e_1e_2e_3}{e_1-e_2-e_3}=\frac{r\ \mathrm{tg}\,\beta\cdot r\ \mathrm{tg}\,\alpha\cdot r\ \mathrm{tg}\,(\beta-\alpha)}{r\ \mathrm{tg}\,\beta-r\ \mathrm{tg}\,\alpha-r\ \mathrm{tg}\,(\beta-\alpha)}=r^2\frac{\mathrm{tg}\,\beta\ \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha}}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha-\dfrac{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha}}=$$

$$=r^2\frac{\mathrm{tg}\,\beta\ \mathrm{tg}\,\alpha(\mathrm{tg}\,\beta\ -\mathrm{tg}\,\alpha)}{(\mathrm{tg}\,\beta-\ \mathrm{tg}\,\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\beta-\ \mathrm{tg}\,\alpha-1)}=r^2,$$

vagyis a kifejezés értéke valóban független C és D megválasztásától, sőt a korlátozások megtartása mellett A és B választásától is.

Kihasználtuk, hogy C és D az ív belső pontjai, ha ugyanis C egybeeshetne A-val, B-vel, akkor az (1) kifejezés értelmetlenné válna. Nem lényeges, hogy C és D közül melyik van közelebb A-hoz, hiszen a kifejezés e_2, e_3-ra nézve szimmetrikus.

Megjegyzés. A kifejezés – inkább a $C=D$, azaz $e_2=e_3$ speciális esetben – alkalmas a következő régészeti kérdés megválaszolására. Egy ásatásnál ívelt alaprajzú kőfal részeire bukkantak, és az árkokban végzett mérésekkel becslést keresnek a hajdani toronybástya átmérőjére – föltételezve természetesen, hogy az alaprajz kör.