I. megoldás. 1. A válasz: igen, fel lehet osztani. Sőt mindjárt többet is követelhetünk: *egybevágó részekre* osztjuk az $ABCD$ parallelogrammát. Ismételten támaszkodunk a következő *segédtételre*: az adott AB szakasz megfelezhető egyetlen (egyélű, hosszúságmérő beosztást nem tartalmazó, az AB szakasz hosszát kissé meghaladó) egyenes vonalzó felhasználásával, ha adott vele párhuzamosan egy e egyenes – mint esetünkben a CD oldal egyenese.

2. Felvéve az AD oldal D-n túli meghosszabbításán egy P pontot, a PB és DC egyenesek metszéspontját Q-val, az $ABQD$ trapéz átlóinak metszéspontját R-rel jelölve azt állítjuk, hogy a PR egyenes kimetszi az AB szakasz F felezőpontját (1. ábra).

1985-10-300-1.eps

1. ábra

Bizonyításul gondoljuk berajzolva az R-en átmenő, e-vel párhuzamos egyenest, és jelöljük az AD, BQ szárral való metszéspontját T_1-gyel, ill. T_2-vel Ekkor RT_1 és RT_2 aránya – a párhuzamos szelők tétele alapján – megadja FA és FB arányát, hiszen

$$RT_1 = \frac{RP}{FP} \cdot FA \quad \text{és} \quad RT_2 = \frac{RP}{FP} \cdot FB.$$

Másrészt ugyanezt a tételt egymás után a D-n, R-en, Q-n átmenő 2–2 egyenesre alkalmazva.

$$\frac{RT_1}{BA} = \frac{RD}{BD} = \frac{RQ}{AQ} = \frac{RT_2}{AB},$$

ennélfogva $RT_1 = RT_2$, tehát $FA = FB$, amint állítottuk.

Segédtételünket ismételgetve kijelöljük az FA és FB szakaszok G_1 és G_2 felezőpontját (Q szerepét az a Q_1 veszi át, ahol PF metszi DC-t), majd az egymással egyenlő FG_1, FG_2, BG_2 szakaszok H_1, H_2, ill. H_3 felezőpontját. Ekkor a H_1B szakasz 5 egyenlő részre van felosztva, és az osztópontok felhasználásával 5 egyenlő részre oszthatjuk a DC szakaszt: legyen DH_1 és CB metszéspontja U, ekkor a keresett D_1, D_2, D_3, D_4 osztópontokat egymás után az UF, UH_2, UG_2, UH_2 egyenesek metszik ki.

3. Ezen a ponton – logikai szempontból – a következő folytatás a legegyszerűbb: ugyanígy megszerkesztjük az AB szakaszt 5 egyenlő részre felosztó A_1, A_2, A_3, A_4 pontokat, és akkor az A_1D_1, A_2D_2, A_3D_3, A_4D_4 szakaszok nyilvánvalóan 5 egybevágó részre osztják $ABCD$-t, tehát a területeik egyenlőek.

Szerkesztésünk tetszőleges $n(>1)$ természetes szám esetén használható, addig ismételjük az AB-n keletkező részek felezgetését, $AB/2^k$ megszerkesztését (k természetes szám), míg $2^k > n$ lesz

Megjegyzések. 1. Ez a megoldás egy másik tekintetben is megemelte a feladatbeli korlátozást: a segédtételt csak az eredeti megfogalmazásában használta fel.

2. A fönti megoldás befejezése csupán „logikailag" egyszerű, amikor valaki csak elmondással („szájjal") szerkeszt. Számlálja csak végig az olvasó, hány egyenest rajzol be, míg megkapja a D_4 osztópontot, ekkor még egyszer annyira van szükség A_4-ig.

Gyakorlatilag viszont rövidebb a következő: az AC átló a már meglevő BD-ből kimetszi a parallelogramma O középpontját, és ekkor D_1O, …, D_4O kimetszi A_4-et, …, A_1-et.

II. megoldás. A következő megoldásban a segédtétel megfordítását használjuk fel: *ismerve egy szakasz végpontjait és a felezőpontját, a sík tetszőleges pontján át megszerkeszthető a szakasszal párhuzamos egyenes.*

A bizonyítást az 1. ábra A, B és F, valamint D pontjára mondjuk el, de majd máshogyan alkalmazzuk esetünkre. A lépések: összekötjük az AD egyenes tetszőleges P pontját B-vel és F-fel, továbbá D-t is B-vel, ez az egyenes PF-ből kimetszi R-et, és ekkor az AR, BP egyenesek Q metszéspontja – ami nyilván nem azonos D-vel – rajta van a keresett e párhuzamoson.

A fentiek mintájára 5 egyenlő hosszú, egymás után csatlakozó szakaszt állítunk elő – de a parallelogramma egyik *átlójával* párhuzamos egyenesen. Ezek alapján 5 egyenlő részre oszthatjuk a parallelogramma megfelelő átlószakaszát, és az osztópontokon át bármelyik oldallal párhuzamosan húzott egyenesekkel ismét 5 egybevágó részt kaphatunk.

1985-10-301-1.eps

2. ábra

A 2. ábrán az átlók metszéspontja F. Csak a D-n átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes szerkesztését vázoltuk (P, R, Q pontok). Ugyanígy kapható a megfelelő átlóval párhuzamos egyenes az A és B csúcson át – a metszéspontok J és K –, majd a JF és KF egyenes kimetszi a J^*, K^* tükörképeket, továbbá a BK egyenes DA-ból M-et, DC-ből N-et, és ekkor $MK = KB = BJ^* = J^*N$. Még egy párhuzamost szerkesztünk, pl. K^*-on át AB-vel, ennek BK-n levő pontja legyen N_1, így NN_1 az ötödik egyező szakasz.

Legyen végül N_1C és AD metszéspontja S, ezt véve vetítési középpontnak, megkapjuk az AC-t 5 egyenlő részre osztó pontokat. Ezeken át megszerkesztve vagy az AB-vel, vagy az AD-vel párhuzamos egyeneseket, ezek mindjárt a kívánt osztóvonalak lesznek.

Megjegyzések. 1. A 2. ábra szerint pl. az AB egyenesen is könnyen kaphatunk 5 egymás után csatlakozó, egyenlő hosszú szakaszt – és a hálózat bővítésével tetszőleges számút is. Ha ennek alapján a JJ^* középvonalnak a parallelogrammába eső szakaszát osztjuk 5 egyenlő részre, így különböző alakú, nem egybevágó részekre való fölosztást is mutathatunk: a 3. ábra szerinti részek — ha mindegyik valóban trapéz – középvonalaik alapján egyenlő területűek.

1985-10-302-1.eps

3. ábra

2. Felszabadulva a részek egybevágóságának magunkra vállalt „nyűgétől" – ettől a „munkahipotézistől" – a 4. ábrán további két megoldást vázoltunk különböző alakú részeket is tartalmazó felosztásra. Az első azonban kivételesen csupa egybevágó részből is állhat, ha $AB : AD = 5 : 2$.

1985-10-302-2.eps

4. ábra

III. megoldás. Mintának vesszük azt az ismert szerkesztést, ahogyan adott négyzetet át lehet darabolni 5 egyező oldalú négyzetbe (5. ábra): oldalainak felezőpontjait ciklikusan összekötve a következő oldal végpontjával, és a 9 rész közül a derékszögű trapézokat egyesítve a szomszédos derékszögű háromszögek egyikével. A szomszéd kétféle megválasztási lehetősége folytán az újra egyesített részek közös alakja háromszög vagy négyszög lehet.

1985-10-302-3.eps

5. ábra

A feldarabolt négyzetnek bármely síkon való, párhuzamos vetítéssel készített képén ugyancsak egyenlőek a területek (csak a kép síkja ne álljon merőlegesen a négyzet síkjára), mert ilyen vetítés mellett a kép és az eredeti területeinek aránya a síkok hajlásszögének koszinuszával egyenlő.

Ez a felosztás végső soron az $5=1^2+2^2$ egyenlőségen alapul. Mégsem az 5-ös szám az egyetlen ilyen, eljárhatunk hasonlóan a $10=1^2+3^2$ egyenlőség alapján is, 2–2 kis tartományt egybefoglalva (6. ábra).

1985-10-302-4.eps

6. ábra

Mindezek az osztóvonalak a föntiek szerint megszerkeszthetők egyetlen egyenes vonalzóval.

Megjegyzés. Számos dolgozat felsorolta a felhasznált forrásokat. Legtöbbször szerepeltek: *P. O. Sklarszkij – N. N. Csencov – I. M. Jaglom*: Válogatott feladatok és tételek stb. Geom. I. (Planimetria) 65/d feladat; *H. Dörrie.* A diadalmas matematika 184. old.