Tegyük fel, hogy a b_n sorozat határértéke B, nem nulla. Ekkor a

$$h_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

sorozatban a számláló és a nevező konvergens, és feltevésünk szerint a nevező határértéke nem 0. (Itt szükséges, hogy $b_n \neq 0$, ami az a_n-re vonatkozó feltétel szerint egy indextől kezdve biztosan teljesül.) A h_n sorozat tehát konvergens és határértéke a számlálóban és a nevezőben álló sorozatok határértékének a hányadosa, vagyis 1. Az $a_{n+1} - a_n$ sorozatot d_n-nel jelölve tehát $h_n = a_{n+1}/2^{d_n}$, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{2^{d_n}} = 1. \tag{2}$$

A fenti gondolatmenetet a b_n helyett a h_n sorozatra megismételve kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{2^{d_{n-1}}}{2^{d_n}} = 1. \tag{3}$$

Megmutatjuk, hogy (3) nem teljesülhet. Ehhez vizsgáljuk meg a d_n és az a_n sorozatokat!

Mivel (2)-ben a számláló a feltétel szerint a $+\infty$-hez tart, a sorozat csak úgy lehet konvergens, ha a nevező, a 2^{d_n} sorozat is a $+\infty$-hez tart. Ebből következik, hogy ugyanez a d_n sorozatra is teljesül, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty. \tag{4}$$

Ha ez igaz, akkor d_n végtelen sok n-re lesz nagyobb, mind d_{n-1}. Mivel egész számokról van szó, a különbség ilyenkor legalább 1, vagyis (3)-ban a $\dfrac{2^{d_{n-1}}}{2^{d_n}}$ hányados végtelen sok a n-re legfeljebb $1/2$. Így (3) biztosan nem teljesülhet, ha belátjuk, hogy a szorzat másik tényezője, az $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat konvergens, és a határértéke 1.

Ismeretes, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$, így a (4) szerint $+\infty$-hez tartó d_n sorozatra ugyancsak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_n}{2^{d_n}} = 0$. Ezt (2)-vel egybevetve kapjuk, hogy d_n az a_{n+1}-hez képest kicsi, pontosabban

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{a_{n+1}} = 0. \tag{5}$$

Ha itt d_n helyére beírjuk a vele egyenlő $(a_{n+1} - a_n)$-et, akkor $\dfrac{d_n}{a_{n+1}} = 1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, vagyis (5) alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, de ekkor a (3)-beli $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat határértéke is 1. (3) tehát valóban nem állhat fönn.

A kapott ellentmondásból következik, hogy ha a b_n sorozat konvergens, akkor a határértéke valóban csak nulla lehet.