Elegendő abban az esetben igazolnunk az egyenlőtlenségeket, ha $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ és $\frac{z}{x}$ pozitívak, mert ha vannak negatív tagok, akkor x-et, y-t és z-t az abszolút értékével helyettesítve, a bal oldalak nem változnak, a jobb odalak értéke pedig nő. Ebből az is következik, hogy ha az egyenlőtlenségek így igazak, akkor biztosan nem állhat egyenlőség, ha $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ és $\frac{z}{x}$ valamelyike negatív.

Rendezzük (1)-et a bal oldalra és szorozzunk 2-vel:

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right) \geqq 0.$$

A bal oldal három négyzet összegeként írható fel, tehát nem negatív. Valóban:

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right)=\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2 \geqq 0.$$

Ezzel (1)-et beláttuk. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha a három négyzet mindegyike nulla, tehát ha $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$, azaz $x=y=z$.

(2) bizonyításához a négyzetes és számtani közép közti összefüggést használjuk fel. Eszerint

$$\frac{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}}{3} \geqq \frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2}{3}, \tag{3}$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$.

Másrészt a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}=1,$$

és egyenlőség $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$ esetén áll.

Ezt (3)-ba beírva:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geqq \frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3}\cdot\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3} \geqq \frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3},$$

és egyenlőség csak $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$, azaz $x=y=z$ esetén áll.