

Jelölje  $Q$  a térnek azt a pontját, amelyet a tetraéder lapsíkjaira tükrözünk. Lássuk el a tetraéder lapsíkjait sor-számmal, és  $Q_i$  jelentse a  $Q$ -nak az  $i$ -edik lap síkjára vonatkozó tükröképét ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Ha a tükröképek mind különbözők és nem esnek egy síkba, akkor valóban meghatároznak egy gömböt. (A feladat szövegét úgy értelmezzük, hogy mindez teljesül.)

Ez más szóval azt jelenti, hogy  $Q$  nem illeszkedik egyidejűleg több lapsíkra, továbbá nincs rajta a tetraéder körülírt gömbjén sem. Ha ugyanis a pont a tetraéder valamelyik élegyenesére illeszkedik, akkor a különböző tükröképek száma 4-nél kevesebb, másfelől egy ismert tétel szerint egy pontot egy tetraéder lapsíkjaira tükrözve a tükröképek egy síkba esnek, ha az eredeti pont rajta van a tetraéder körülírt gömbjén. Minden más esetben 4 különböző tükröképet kapunk, amelyek nem esnek egy síkba. Mivel az általunk meghatározott gömb középpontja  $P$ , sugara pedig  $r$ , azért  $PQ_i = r$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Ha most a  $P$  pontot tükrözzük a tetraéder lapsíkjaira, akkor a  $P_i$  pontokat kapjuk. Mivel  $P_i$  és  $Q_i$  az ugyanarra a lapsíkra vonatkozó tükrözéssel keletkeznek  $P$ -ből, illetve  $Q$ -ből, így a  $P_iQ$  szakasz a  $PQ_i$  szakasznak az  $i$ -edik lapsíkra vonatkozó tükröképe. Ez azt jelenti, hogy

$$P_iQ = PQ_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

A  $PQ_i$  szakaszok hossza az előzőek szerint  $r$ -rel egyenlő, ezért a  $P_i$  pontok is egy  $r$  sugarú gömbön vannak rajta, amelynek középpontja  $Q$ .

*Megjegyzés.* A feladat kitűzésekor szándékunk szerint ennek bizonyítását kértük. A dolgozatokból az derült ki, hogy a beküldők így is fogták fel a feladatot. Látnunk kell azonban, hogy nyitva maradt az a kérdés, hogy  $P$  tükröképei egyáltalán meghatároznak-e gömböt, ahogyan az „új gömb” kifejezés sugallja.  $P$  tükröképei között lehetnek ugyanis egybeesők, de e nélkül is eshetnek egy síkba. Előfordulhat tehát, hogy nincs „új gömb”, hanem a tükröképekre illeszkedő sík (síkok), valamint gömbök végtelen sokasága jön létre, amelyek között található  $r$  sugarú is.

Nem volna érdektelen annak elemzése, hogy ez pontosan mikor következik be. Ezt most nem végezzük el, csupán egy fontos speciális esetet említünk, amely szemlélteti az itt leírtakat.

$Q$  pontnak válasszuk a tetraéder egyik lapjának belső pontját. A  $Q_i$  pontok ekkor mind különbözők és nincsenek egy síkban. Az általuk meghatározott gömb  $P$  középpontja a tetraédernek éppen a  $Q$  pontot tartalmazó lapjával szemközti csúcsa. Így módon a  $P$  tükröképei közül három egybeesik, azaz mindössze két különböző  $P_i$  pontunk van.