Előrebocsátjuk, hogy a súlyvonalat úgy értjük, hogy a háromszög csúcsából indul és halad a szemben levő oldal felezőpontja felé. Eszerint az értelmezés szerint az állításban szereplő vetület az oldalhoz van közelebb.

Az állítást koordináta-geometriai úton bizonyítjuk az ABC háromszög CO súlyvonalára, ahol O az origó és C a $(0,\, p)$ pont $(p>0)$. Legyen még az OB szakasz hossza 1 egység, az x tengellyel bezárt szöge $\varphi(\neq \pm 90°)$. Ekkor $B(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, tehát $A(-\cos\varphi,\ -\sin\varphi)$.

1985-12-445-1.eps

Elég lesz meghatároznunk az M magasságpont ordinátáját (második koordinátáját), ez lesz egyszersmind az M' pontnak, az állításban szereplő vetületnek az ordinátája is. Felírjuk a B és a C csúcsra illeszkedő magasságvonal egy-egy normálvektorát :

$$\overrightarrow{AC}(\cos\varphi,\ p+\sin\varphi), \quad \text{ill.} \quad \overrightarrow{OB}(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Így e két magasságvonal egyenlete abból, hogy átmegy B-n, ill. C-n:

$$x\cdot\cos\varphi + y(p+\sin\varphi) =$$
$$\cos^2\varphi + p\sin\varphi + sin^2\varphi,$$

és

$$x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi = p\cdot\sin\varphi.$$

Az egyenletrendszerből $y=\dfrac{1}{p}$ adódik. M' tehát a CO súlyvonalat

$CM' : M'O = \left(p-\dfrac{1}{p}\right) : \dfrac{1}{p}$, azaz

(1) $$CM' : M'O = (p^2-1) : 1$$

arányban osztja ketté. Ez p minden megengedett értékére érvényes.

a) Ha mármost azt kívánjuk, hogy az A és B csúcsokból kiinduló súlyvonalak merőlegesen álljanak egymásra, vagyis az $S\left(0,\ \dfrac{p}{3}\right)$ súlypontnál $ASB\sphericalangle = 90°$ legyen, akkor S rajta van az AB szakasz Thalész-körén, tehát $OS=OB=1$, vagyis $p=3$. Ekkor (1)-ben $p^2-1=8$, tehát M' a C-ből kiinduló súlyvonalat $8:1$ arányban osztja ketté, az állításbeli feltétel *szükséges.*

b) Induljunk ki most abból, hogy M' a CO súlyvonalat $8:1$ arányban osztja ketté. Ekkor M' második koordinátája $\dfrac{1}{9}p$. Ugyanez a koordináta, amint azt megállapítottuk, $\dfrac{1}{p}$. Ebből következik – mivel p pozitív, – hogy $p=3$. A háromszög súlypontja ekkor $S(0,\,1)$. Ez rajta van az AB oldal Thalész-körén, és nem esik egybe sem A-val, sem B-vel, ezért az SA, SB egyenesek merőlegesek egymásra. A feltétel tehát *elegendő* is. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Figyeljünk fel arra, milyen ügyesen helyezte bele a megoldás az alakzatot a koordináta-rendszerbe ! Elkerülte ezt a csábítást : origónak venni S-et és a tengelyekre tenni az A, B csúcsokat, ami pedig a megfordításhoz már nem alkalmas.Ezenkívül (1)-ben – nyelvtanilag – csak az *alany* szerepel, az M' pont osztásaránya. Ezért lehetett oda-vissza felhasználni (1)-et.