Legyen az ABC háromszögben a beírt kör középpontja O, a körülírt kör középpontja K, a megfelelő sugarak rendre r, illetve R, a két pont távolsága d.

Euler tétele[1] szerint minden háromszögben

$$d^2 = R^2 - 2rR. \tag{1}$$

Esetünkben a beírt kör átmegy a K ponton, így $d = r$, tehát $r^2 = R^2 - 2rR$. Ebből $R = (\sqrt{2}+1)r$, az R/r arány másik értéke negatív.

1985-10-299-1.eps

Legyen $ABC\sphericalangle = \beta = 60°$, $BAC\sphericalangle = \alpha$ pedig a háromszög keresett legnagyobb szöge. T legyen az O pontból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja. Az OBT derékszögű háromszögben OB a β szög szögfelezője, ezért $OBT\sphericalangle = 30°$, $BO = 2r$. Ezzel a KOB háromszög mindhárom oldalát ismerjük r függvényében.

Az ABC háromszög hegyesszögű, hiszen K belső pont, ezért $60° \leqq \alpha < 90°$. $BKC\sphericalangle = 2\alpha$, hiszen ez az α-hoz mint kerületi szöghöz tartozó középponti szög. A BKC egyenlő szárú háromszögben $KBC\sphericalangle = KCB\sphericalangle = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha \leqq 30°$.

Alkalmazzuk a koszinusztételt az OBK háromszögre:

$$OBK\sphericalangle = OBT\sphericalangle - KBC\sphericalangle = 30° - (90° - \alpha) = \alpha - 60°.$$

$$\cos(\alpha - 60°) = \frac{BK^2 + BO^2 - OK^2}{2BK \cdot BO} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}, \tag{2}$$

ebből $\alpha = 83,91°$ (nem számítottuk át a töredék fokot).

Ez az érték megfelelő, hiszen ekkor (2)-ből

$$OK^2 = d^2 = R^2 - 4r^2 - 2(2\sqrt{2}-1)Rr = R^2 - 2rR,$$

az (1) miatt, ebből $R = (\sqrt{2}+1)r$, és ezt (1)-be helyettesítve: $d^2 = (\sqrt{2}+1)^2 r^2 - 2(\sqrt{2}+1)r^2 = r^2$, tehát abban a háromszögben; amelynek szögei $83,91°$, $60°$ és $36,09°$, a beírt kör valóban átmegy a körülírt kör középpontján.

Megjegyzés. Annak bizonyítása, hogy a talált háromszög megfelel a követelménynek, majdnem minden dolgozatból hiányzott.

[1] A tétel bizonyítása megtalálható például *Molnár Emil*: Matematikai Versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970 (Tankönyvkiadó, 1974) 285. oldal.