I. megoldás. Ha $f(x)$ ötödfokú, $f(x)+1$ és $f(x)-1$ is ilyen. Ha $(f(x)+1)$-ből $(x-1)^3$ kiemelhető, akkor van olyan $q(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú polinom, amelyre

$$f(x)+1 \equiv (x-1)^3(ax^2+bx+c), \tag{1}$$

és hasonlóan, ha $(f(x)-1)$-ből $(x+1)^3$ kiemelhető, akkor van olyan $p(x)=dx^2+ex+g$ másodfokú polinom, amelyre

$$f(x)-1 \equiv (x+1)^3(dx^2+ex+g). \tag{2}$$

(1)-ből (2)-t kivonva:

$$2 \equiv (x-1)^3(ax^2+bx+c)-(x+1)^3(dx^2+ex+g),$$

vagyis

$$\begin{gathered}2 \equiv (a-d)x^5+(b-3a-e-3d)x^4+(c-3b+3a-g-3e-3d)x^3+\\ +(-3c+3b-a-3g-3e-d)x^2+(3c-b-3g-e)x-c-g\end{gathered}$$

adódik. Az azonosság minden x-re csak úgy teljesül, ha a jobb oldalon

$$-(c+g)=2, \tag{3}$$

és a magasabb fokú tagok együtthatója nulla, tehát

$$\begin{gathered}a=d, \qquad b-3a=e+3d, \qquad c-3b+3a=g+3e+3d,\\ -3c+3b-a=3g+3e+d, \qquad 3c-b=3g+e.\end{gathered} \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenletrendszer 6 ismeretlenes, 6 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer. Az ismert módszerek bármelyikével megoldva :

$$a=d=-\frac{3}{8}, \quad b=-\frac{9}{8}, \quad e=\frac{9}{8}, \quad c=g=-1.$$

A keresett polinomra (1)-ből

$$f(x)=(x-1)^3\left(-\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x-1\right)-1=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$$

adódik. Ez a polinom valóban megfelelő, és megoldásunkból látszik, hogy ez az egyetlen ilyen polinom.

II. megoldás. Ha $(f(x)+1)$-ből kiemelhető $(x-1)^3$, akkor a deriváltja, $f'(x)$, osztható $(x-1)^2$-tel. $(f(x)-1)$-ből $(x+1)^3$ emelhető ki, tehát deriváltjának, $f'(x)$-nek a -1 kétszeres gyöke, tehát $f'(x)$-ből $(x+1)^2$ is kiemelhető. Így azt kapjuk, hogy $f'(x)$-ből kiemelhető.

$$(x-1)^2(x+1)^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1.$$

De $f(x)$ ötödfokú, így $f'(x)$ negyedfokú. Ebből

$$f'(x)=A(x^4-2x^2+1)$$

következésképp

$$f(x)=\frac{Ax^5}{5}-\frac{2Ax^3}{3}+Ax+C.$$

A és C kiszámításához azt kell meggondolnunk, hogy $f(x)+1$ osztható $(x-1)^3$-nel, tehát $f(1)+1=0$, azaz $f(1)=-1$.

$$-1=f(1)=\frac{A}{5}-\frac{2A}{3}+A+C. \tag{5}$$

Másrészt $f(x)-1$ osztható $(x+1)^3$-nel, tehát $f(-1)-1=0$, azaz $f(-1)=1$.

$$1=f(-1)=-\frac{A}{5}+\frac{2A}{3}-A+C. \tag{6}$$

(5) és (6) összeadásából $0 = 2C$, azaz $C = 0$. Ha (6)-ból (5)-öt kivonjuk, akkor $-\frac{16}{15}A = 2$, tehát $A = \frac{-15}{8}$ adódik. Ebből

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

Ez a polinom (és csak ez) megfelel a követelményeknek.

III. megoldás. Ha $f(x) - 1$-ből kiemelhető $(x+1)^3$, akkor $f(-x) - 1$-ből $(-x+1)^3$, azaz $-(x-1)^3$ emelhető ki. Így $(x-1)^3$ kiemelhető $f(x)+1$-ből és $f(-x)-1$-ből, tehát a kettő összegéből, $f(x)+f(-x)$-ből is. Hasonlóan kapjuk, hogy $f(x)+f(-x)$-ből $(x+1)^3$ is kiemelhető.

Az $f(x)+f(-x)$ polinom is (legfeljebb) ötödfokú, s kiemelhető belőle $(x+1)^3$ és $(x-1)^3$, tehát $(x+1)^3\ (x-1)^3$ is (mert az $(x+1)^3$ és $(x-1)^3$ polinomoknak nincs közös polinom osztójuk). Egy legföljebb ötödfokú polinomból csak akkor lehet kiemelni az $(x+1)^3(x-1)^3$ hatodfokú polinomot, ha az azonosan nulla polinomról van szó. Tehát

$$f(x) + f(-x) \equiv 0, \quad \text{azaz} \quad f(x) \equiv -f(-x), \tag{7}$$

vagyis $f(x)$ páratlan függvény.

Legyen $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. (7) szerint $f(0) = -f(0)$, tehát $a_0 = f(0) = 0$. Az $a_5x^5a_3x^3 + a_1x$ függvény páratlan, és páratlan függvények különbsége is páratlan, tehát a

$$g(x) = a_4x^4 + a_2x^2 = f(x) - a_5x^5 - a_3x^3 - a_1x$$

függvény páratlan. Másrészt $g(x)$ nyilván páros is, tehát $g(-x) \equiv g(x) \equiv -g(-x)$, s innen $g(x) \equiv 0$ adódik. $g(x)$ tehát azonosan nulla, s így $a_4 = a_2 = 0$, tehát $f(x) \equiv a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x$.

$f(x)+1$-ből kiemelhető $(x-1)^3$, tehát deriváltjából, $f'(x)$-ből $(x-1)^2$ és $f''(x)$-ből $(x-1)$. Tehát $f(1)+1 = f'(1) = f''(1) = 0$. Ezt behelyettesítve a

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) = a_5 + a_3 + a_1 + 1, \\ 0 &= f'(1) = 5a_5 + 3a_3 + a_1, \\ 0 &= f''(1) = 20a_5 + 6a_3 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ennek az egyenletrendszernek az $a_5 = -\frac{3}{8}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, $a_1 = -\frac{15}{8}$ számhármas a megoldása. Tehát a feladatnak csak az $f(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x$ polinom felelhet meg, s ez meg is felel.

Megjegyzés. A III. megoldás gondolatmenetével belátható, hogy ha a $p(x)$ polinomfüggvény páratlan függvény, akkor a páros fokú tagok együtthatója nulla. Ha $p(x)$ páros függvény, akkor a páratlan fokú tagok együtthatója 0.