I. megoldás. Legyen $n = 2^m$ (m pozitív egész) és $2 \leqq k \leqq 2^m - 1$ egész. Ekkor

$$\binom{n}{k} = \binom{2^m}{k} = \frac{2^m(2^m-1)\dots(2^m-k+1)}{k!} = \tag{1}$$
$$= \frac{2^m}{k} \cdot \frac{2^m-(k-1)}{k-1} \cdot \frac{2^m-(k-2)}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2^m-1}{1}.$$

Ez a szám biztosan egész. Egyszerűsítsük gondolatban a törtet úgy, hogy először a kettő hatványaival osszunk! Ha l páratlan, akkor $2^m - l$ is páratlan, és így $\dfrac{2^m-l}{l}$-nek sem a számlálójában, sem pedig a nevezőjében nincs 2-es tényező. $2^m-2, 2^m-6, 2^m-10, \dots$ páros, de néggyel nem osztható, így $\dfrac{2^m-2}{2}, \dfrac{2^m-6}{6}, \dfrac{2^m-10}{10}, \dots$ 2-vel való egyszerűsítés után rendre két páratlan szám hányadosa lesz.

Általában is igaz, hogy ha $1 \leqq l < 2^m$, akkor l és $2^m - l$ kettőnek ugyanazzal a hatványával osztható. (Ha ugyanis 2^i osztja l-et, akkor $l < 2^m$ miatt $2^i < 2^m$, tehát $i < m$, s így 2^i osztja 2^m-et is, tehát $(2^m - l)$-et is. Ha pedig 2^i osztja $(2^m - l)$-et, akkor osztja $2^m - (2^m - l) = l$-et is.)

A $\dfrac{2^m-l}{l}$ tört tehát általában is egyszerűsíthető úgy, hogy a számlálóban és a nevezőben is páratlan szám maradjon, feltéve, hogy $1 \leqq l < 2^m$. (1) jobb oldalán így a $\dfrac{2^m-(k-1)}{k-1}, \dfrac{2^m-(k-2)}{k-2}, \dots, \dfrac{2^m-1}{1}$ törtek mindegyike két páratlan szám hányadosává egyszerűsíthető ($1 \leqq k-1 < 2^m$). Végül $1 \leqq k < 2^m$ miatt k biztosan kettőnek m-nél kisebb kitevőjű hatványával osztható, tehát a $2^m/k$ tört egyszerűsítése után a számlálóban marad legalább egy 2-es tényező. Vagyis $\dbinom{2^m}{k}$-ban $2 \leqq k < 2^m$ esetén kettő minden lehetséges hatványával egyszerűsítve a nevező páratlan lesz, a számláló pedig páros.

Folytassuk az egyszerűsítést a 2-nél nagyobb prímek megfelelő hatványával! Miután 2-vel a továbbiakban már nem osztunk, az eredményül kapott egész szám páros.

Megmutattuk tehát, hogy $\dbinom{2^m}{k}$ biztosan páros, ha $2 \leqq k < 2^m$.

$k = 1$ esetben $\dbinom{2^m}{k} = \dbinom{2^m}{1} = 2^m$ nyilván páros. Ezzel az állítást beláttuk.

Bebizonyítjuk, hogy az állítás fordítottja is igaz: ha n nem kettőhatvány, akkor van olyan $1 \leqq k < n$, amelyre $\dbinom{n}{k}$ nem páros. Ha n nem kettőhatvány, akkor a számelmélet alaptétele szerint $n = 2^m p$ alakba írható, ahol $m \geqq 0$, p pedig 1-nél nagyobb páratlan szám. Ha most $k = 2^m$, akkor

$$\binom{n}{k} = \binom{2^m \cdot p}{2^m} = \frac{2^m \cdot p \cdot (2^m \cdot p - 1) \cdot \ldots \cdot (2^m \cdot p - 2^m + 1)}{2^m \cdot (2^m - 1) \cdot \ldots \cdot 1} = \tag{2}$$
$$= \frac{2^m \cdot p}{2^m} \cdot \frac{2^m \cdot p - 1}{2^m - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{2^m \cdot p - l}{2^m - l} \cdot \ldots \cdot \frac{2^m \cdot p - 2^m + 1}{1}.$$

Most azt használjuk fel, hogy $2^m p - l$ és $2^m - l$ törzstényezős felbontásában a 2 ugyanazon hatványon fordul elő, ha $0 \leqq l < 2^m$. Ez az $l = 0$ esetben nyilvánvaló; hisz a p páratlan. A megoldás első felében láttuk, hogy l és $2^m - l$ 2-nek ugyanazzal a hatványával oszthatók. Megmutatjuk, hogy $2^m p - l$ prímtényezős felbontásában is ez a 2-hatvány szerepel.

Ha $2^i | l$, akkor $2^i < 2^m$ és így $2^i | 2^m$, tehát $2^i | 2^m - l$ és $2^i | 2^m p - l$. Megfordítva, ha $2^i | 2^m p - l$, akkor $i < m$. Ellenkező esetben ugyanis $2^m | 2^m p - l$ és ebből $2^m | l$ következne, ami $0 < l < 2^m$ miatt nem lehet. Így viszont $2^i | 2^m p - l$-ből $2^i | 2^m p$ miatt valóban $2^i | l$ adódik.

Azt kaptuk, hogy (2)-ben a $\dfrac{2^m \cdot p - l}{2^m - i}$ törtek mindegyike páratlan számok hányadosává egyszerűsíthető, és mivel a törtek szorzata, $\dbinom{n}{k}$ egész, ebben az esetben $\dbinom{n}{k}$ páratlan.

II. megoldás. A binomiális együtthatók kombinatorikai jelentését használjuk ki a megoldásban. Először m-re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha $1 \leqq k < 2^m$, akkor $\dbinom{2^m}{k}$ páros. Ha $m = 0$, akkor az állítás üres, ha pedig $m = 1$, akkor csak $k = 1$ jöhet szóba és $\dbinom{2^1}{1} = 2$ páros.

Tekintsük most a $\dbinom{2^{j+1}}{k}$ számot ($1 \leqq k < 2^{j+1}$). Ez azt mutatja meg, hogy hányféleképpen választható ki egy 2^{j+1} elemű A halmazból k elem. Osszuk A-t két egyenlő elemszámú, 2^j elemű A_1 és A_2 halmazra !

A-ból úgy választhatunk ki k elemet, hogy A_1-ből 0, A_2-ből pedig k elemet választunk ki – ez összesen $\binom{2^j}{0} \cdot \binom{2^j}{k} = \binom{2^j}{k}$-féleképpen tehető meg[1] – és általában, A_1-ből i darabot, A_2-ből pedig $(k-i)$ darabot – ami összesen $\binom{2^j}{i} \cdot \binom{2^j}{k-i}$-féleképpen lehetséges. Azt kapjuk, hogy

$$\binom{2^{j+1}}{k} = \binom{2^j}{0} \cdot \binom{2^j}{k} + \binom{2^j}{1} \cdot \binom{2^j}{k-1} + \ldots + \binom{2^j}{i} \cdot \binom{2^j}{k-i} + \ldots + \binom{2^j}{k} \cdot \binom{2^j}{0}. \tag{3}$$

A fenti egyenlőség jobb oldalán az első és az utolsó tag egyenlő, összegük tehát páros. Minden további $\binom{2^j}{i}\binom{2^j}{k-i}$ szorzatban i és $k-i$ pozitív és mivel összegük kisebb 2^{j+1}-nél, legalább egyikük kisebb, mint 2^j. A szorzatnak ez a tényezője így az indukciós feltevés szerint páros, és így (3) jobb oldalán páros szám áll.

Az állítás megfordításának bizonyításához tegyük most fel, hogy az n nem 2-hatvány, és legyen 2^k az n-nél kisebb 2-hatványok legnagyobbika. Ekkor $n = 2^k + r$, ahol $0 < r < 2^k$.

Azt állítjuk, hogy $\binom{n}{r}$ páratlan. Az első rész bizonyításához hasonlóan osszuk most az n elemű A halmazt egy 2^k elemű A_1 és egy r elemű A_2 részre, majd csoportosítsuk az A halmaz r elemű részhalmazait aszerint, hogy hány A_2-beli elemet tartalmaznak. Így a (3)-hoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\binom{n}{r} = \binom{2^k}{0}\binom{r}{r} + \binom{2^k}{1}\binom{r}{r-1} + \ldots + \binom{2^k}{i}\binom{r}{r-i} + \ldots + \binom{2^k}{r}\binom{r}{0}. \tag{4}$$

A fenti összeg első tagja 1 – ez annak felel meg, hogy az r elem mindegyike az A_2 halmazból való –, a további tagok első tényezője pedig $\binom{2^k}{i}$, ahol $0 < i < 2^k$, ami az állítás első része szerint páros. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben $\binom{n}{r}$ páratlan.

Megjegyzések. 1. Ismeretes, hogy $n!$ prímtényezős felbontásában a 2 kitevője $s(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots$. Ha most $2^m \leqq n < 2^{m+1}$, akkor $s(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^m}\right] \leqq n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) = n\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \leqq n-1$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 2^m$.

Ez azt jelenti, hogy a $\binom{2^m}{k} = \frac{(2^m)!}{k!(2^m-k)!}$ tört számlálójának prímtényezős felbontásában $2^m - 1$, a nevezőben pedig legfeljebb $(2^m - k - 1) + (k-1) = 2^m - 2$ darab kettős tényező szerepel, így az állítás első felének újabb bizonyítását kapjuk.

2. A feladat állítása igaz marad, ha a 2 helyére tetszőleges p prímszámot írunk.

3. A feladat kapcsolatban áll a tavalyi Kürschák-verseny 1. feladatával. A megoldásokat lásd a következő cikkben: *Surányi János:* Az 1984. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása KML 35 (1985) 51. oldal.

---

[1] Ha $k > n$, akkor megállapodás szerint $\binom{n}{k} = 0$.