I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{2\sin x}{1+\cos x}-x>0 \tag{1}$$

egyenlőtlenséggel a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban, s itt a bal oldal értelmezve van. $x=0$-ban a bal oldal nulla. Ha tehát az $f(x)=\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}-x$ függvényről belátjuk, hogy szigorúan monoton növő a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban, akkor abból az is következik, hogy $f(x)>f(0)$, s így (1) teljesül. Elég tehát belátni, hogy $f'(x)$ a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban létezik és pozitív, és hogy $f'(0)=0$, mert ebből már következik, hogy $f(x)$ szigorúan monoton növő a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban. Mármost $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ esetén

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{2\cos x(1+\cos x)-2\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}-1=\\
&=\frac{2\cos x+2\cos^2 x+2\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}-1=\frac{2(\cos x+1)}{(1+\cos x)^2}-1=\\
&=\frac{2}{1+\cos x}-1=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.
\end{aligned}$$

Ha most $0<x<\pi/2$, akkor $0<\cos x<1$, így $f'(x)$ ebben az esetben valóban pozitív. Másrészt $f'(0)=\dfrac{1-\cos 0}{1+\cos 0}$, ami valóban 0. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az egyenlőtlenség jobb oldala

$$\frac{2}{\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}=\frac{2\sin x}{1+\cos x}=\frac{4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

s ezek az átalakítások $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ esetén elvégezhetők. Az egyenlőtlenség tehát az

$$\frac{x}{2}<\operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{2}$$

alakot ölti. Ismeretes, hogy ha $0<y<\dfrac{\pi}{2}$, akkor $y<\operatorname{tg} y$, márpedig (2)-ben $\dfrac{x}{2}$ a 0 és $\dfrac{\pi}{4}$ korlátok közé esik. Ezzel a feladat állítását beláttuk.