Jelöljük a test csúcsainak, lapjainak, éleinek számát rendre $c,\ l,\ e$-vel. Mivel a test konvex, azért minden háromszög minden oldala egy másik háromszög egy teljes oldalával alkot élt, csúcs nem lehet belső pontja élnek vagy lapnak. Érvényes a testre az Euler-féle poliéder-tétel:

$$l+c=e+2.$$

Mivel minden lapnak 3 oldala van és minden él 2 laphoz tartozik hozzá, azért az éleket mindkét lapjukban beszámítva

$$2e=3l,\qquad \text{azaz}\qquad l=\frac{2e}{3},$$

és a közlés szerinti mértani sorozat hányadosa $e/l=3/2$. Ugyanennyi tehát l/c értéke is, vagyis

$$c=\frac{2}{3}\,l=\frac{4}{9}\,e.$$

Ezeket az egyenletbe helyettesítve $e=18,\ l=12$ és $c=8$.

1985-05-209-1.eps

1. ábra

Ilyen testet kapunk, ha egy szabályos hatoldalú (egyenlő oldalélű) gúlát tükrözünk az alaplapjára (1. ábra). Az oldallapok vetülete az alaplap síkjára szabályos háromszög lesz, melynek oldala egyenlő a háromszöglapok alapjával, egyben a lapok szárának megrövidült vetületével. Ebben a testben tehát az egybevágó lapok szára nagyobb az alapjuknál, vagyis a szárak közti szög kisebb, mint 60°.

Kielégíti a feladat követelményeit a következő test is. Egy szabályos tetraéder lapjaira a középpontjukban merőlegest emelünk, ezekre kifelé egyenlő szakaszokat mérünk fel, és a végpontok adják a test további 4 csúcsát (2. ábra). Ezzel az eredeti 4 lapra egy-egy 3 oldalú gúlapalástot tettünk rá, az ezután látható lapok $(4\cdot 3=12)$ nyilvánvalóan egybevágó, egyenlő szárú háromszögek.

1985-05-209-2.eps

2. ábra

Ezekben a lapokban az alap a legnagyobb oldal, és a vele szemben levő szög kisebb, mint 120°, különben a gúlapalástok egy-egy síkot adnának. A szárak közti szögre alsó korlátot is kapunk a fölmérhető szakasz felső korlátjából.

Legyen az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC és ABD lapjának középpontja D', ill. C' (a negyedik csúcs vetülete), az ezekben fölmért szakaszok végpontja E, ill. G, az AB él felezőpontja F. A konvexség követelménye, hogy

$$EFG\sphericalangle=EFD'\sphericalangle+D'FC'\sphericalangle+C'FG\sphericalangle=2\cdot EFD'\sphericalangle+D'FD\sphericalangle<180^\circ$$

legyen, vagyis

$$\cos 2\cdot EFD'\sphericalangle>\cos(180^\circ-D'FD\sphericalangle)=-\frac{1}{3},$$

hiszen $\cos\delta=\cos D'FD\sphericalangle=D'F/DF=1/3$.

Tekintsük azt a γ szöget, amelyre $\cos 2\gamma=-1/3$, vagyis amely mellett $A,\ E,\ B$ és G egy síkban vannak. Ez nyilván hegyesszög, tehát

$$\cos\gamma=+\sqrt{\frac{1+\cos 2\gamma}{2}}=\frac{1}{\sqrt3}.$$

Ebből $\operatorname{tg}\gamma=\sqrt2$, így pedig $EFD'\sphericalangle<\gamma$ miatt $\operatorname{tg} EFD'\sphericalangle=D'E/D'F<2$. És mivel még $D'F=CF/3=AB/2\sqrt3$, azért a fölmért szakaszra

$$D'E<\sqrt2 D'F=\frac{1}{\sqrt6}AB=\frac{1}{2}DD'=\frac{2}{3}OD=\frac{2}{3}R,$$

ahol O a tetraéder súlypontja, egyben középpontja, és R a körülírt gömb sugara.

Ha a merőlegesekre $D'E=2\cdot OD/3$-at mérünk fel, akkor $OE=R$ lesz, hiszen $OD'=DD'/4=OD/3$, E rajta lesz a tetraéder köré írt gömbön, és a 8 csúcs kockát határoz meg.

Eredményünket így is kimondhatjuk: a test lapjain $90^\circ<AEB\sphericalangle<120^\circ$. – A kristálytanban ezt az alakot *triakisztetraéder*nek (3-szoros tetraédernek) nevezik.

Megjegyzések. 1. A feladat csak 1 megfelelő test leírását kérte, és a megoldást teljesnek tekintettük 1 test leírásával. Nekünk viszont nyilván mindkét testet le kellett írnunk.

2. Nem bizonyítjuk, hogy több ilyen test nem létezik, viszont megcáfolunk egy téves sejtést. Volt ilyen vélemény: megfelelő test az is, ha 6 háromszögből egy 6-oldalú *antiprizma* palástját állítjuk össze, majd ennek szabályos háromszöget alkotó „bejáratai” fölé 3 oldalú gúlapalástokat szerkesztünk (3. ábra, ilyen antiprizmát kapunk, ha egy lapjára

állított szabályos oktaédert „függőlegesen” nyújtunk vagy zsugorítunk). Ha azonban ABH és ABF egybevágó, egyenlő szárú háromszögek, akkor egyenlő szöggel hajlanak az ABC síkhoz (befelé, ill. kifelé) és a test 2-2 lapja síknégyszöggé áll össze; AB nem él lesz, hanem lapbeli átló. A testet 6 egybevágó rombusz határolná (paralelepipedon, 3 ütemű forgástengellyel, 3 szimmetriasíkkal. (Az antiprizma csúcsainak vetületei az ABC síkra egy szabályos hatszöget alkotnak!)

1985-05-210-1.eps

3. ábra