A 2473. feladat[1] megoldásából átvesszük mindazokat a jelöléseket és összefüggéseket, melyek jelenlegi feladatunk megoldásánál felhasználhatók.

Az ABC háromszög körülírt körének sugara legyen egységnyi, középpontját jelölje O, a $BAC\sphericalangle = 2\varphi$. A háromszög szárai által 3 egyenlő részre osztott húr végpontjai F, G, harmadolópontjai F_1, G_1. Jelöljük továbbá x-szel az AX távolságot.

1985-09-254-1.eps

1. eset. Az AO egyenesre merőleges FG húr esetén (lásd ábra)

$$XG = 3x \ \text{tg} \ \varphi.$$

Az OXG derékszögű háromszög oldalaira – mivel $OA = OG = 1$ – fennáll

$$|x-1|^2 + 9x^2 \ \text{tg}^2\,\varphi = 1,$$

ahonnan

$$x = \frac{2}{1+9 \ \text{tg}^2\,\varphi}, \quad \text{mivel} \quad x \neq 0.$$

Ha $\cos 2\varphi$ értéke 1-től 3/4-ig folytonosan csökken, akkor $\text{tg}^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}$ alapján $\text{tg}^2\varphi$ értéke 0-tól 1/7-ig folytonosan növekszik, hiszen $1 - \cos\ 2\varphi$ növekszik, $1 + \cos\ 2\varphi$ pedig csökken. Ennek következtében x értéke 2-től 7/8-ig folytonosan csökken.

E változások szigorúan monoton jellege folytán φ és x között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a mondott intervallumokban. Ez biztosítja, hogy az A kezdőpontú AO félegyenes minden olyan P pontjához, amelyre $7/8 < AP < 2$, találunk a feltételeknek megfelelő ABC háromszöget és húrt úgy, hogy X azonos P-vel.

2. eset. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor az F^*G^* húr nem merőleges AO-ra. A 2473. feladat megoldása szerint $XF_1^*O\sphericalangle = F_1^*AO\sphericalangle = \varphi^*$. Az F_1^*OX háromszög hasonló az AOF_1^* háromszöghöz, a hasonlóság alapján

$$\frac{OX}{OF_1^*} = \frac{OF_1^*}{OA}.$$

Az idézett megoldásban az is szerepel, hogy $OF_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{1+8\cos^2\varphi}}$, és mivel $OA = 1$, az előbbi aránypárból $OX = \dfrac{1}{1+8\cos^2\varphi}$. Ezért

$$x = AX = 1 - OX = \frac{8\cos^2\varphi}{1+8\cos^2\varphi} = \frac{8}{9+\text{tg}^2\varphi}.$$

(0 mindig az F^*G^* egyenes A-t nem tartalmazó partján van.) Ha $\text{tg}^2\varphi$ 0-tól 1/7-ig nő, x értéke 8/9-től 7/8-ig csökken.

Az X számára most kapott intervallum része a föntebbinek, ennélfogva azokon az X pontokon megy át 3 harmadolható húr – a két eset szerint külön-külön meghatározható értékek mellett –, amelyekre $\dfrac{7}{8} < x < \dfrac{8}{9}$. (Az intervallum hossza 1/72.)

A szimmetrikus, ill. a ferde húrhoz tartozó szögekre

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{x}} - 1}, \quad \text{ill.} \quad \text{tg}\ \varphi^* = \sqrt{\frac{8}{\mathrm{x}} - 9}.$$

[1] K. M. L. 34 (1984) 443. oldal – December havi szám