Legyen a k_i kör középpontja O_i ($i = 1,\ 2,\ 3$), a két kör közös külső érintőinek metszéspontja (azaz külső hasonlósági pontjuk) a k_1, k_2 körpár esetére A, a k_1, k_3 esetére B, továbbá az A-ból k_3-hoz húzott érintők a_1 és a_2, a B-ből k_2-höz húzott érintők b_1 és b_2. Az A, B pontok létezését a feladat föltevései biztosítják, és azt is, hogy az O_i pontok az AB egyenes egyik partján vannak. Föltesszük azt is, hogy A kívül van k_3-on és B kívül van k_2-n, különben nem volna bizonyítanivalónk.

1985-05-206-1.eps

1. ábra

1. Az O_i középpontok általában nincsenek egy egyenesen, ekkor A és B különbözők. Először egy ilyen helyzetet tekintünk, bizonyításunkat az 1. ábrán látható helyzethez kapcsoljuk.

Az állítás szerinti kör középpontjaként csak az $a_1,\ a_2$, valamint $b_1,\ b_2$ érintőpár közti szögek egyik-egyik felezőjének M metszéspontja jöhet szóba. Emiatt M körül rajzolható olyan kör, amely érinti az $a_1,\ a_2$ egyenespárt és olyan is, amely a $b_1,\ b_2$ párt érinti. Legyen a sugaruk ϱ_a, ill. ϱ_b, a feladat állítása azt jelenti, hogy ezek egyenlők. Ezt akarjuk megmutatni az ábra M pontja esetére.

Alkalmazzuk Menelaosz tételét [1] az O_1O_3A háromszögre és az O_2B átmetsző egyenesre, amely M-ben metszi az O_3A oldalegyenest:

$$\frac{AO_2}{O_2O_1}\cdot\frac{O_1B}{BO_3}\cdot\frac{O_3M}{MA}=-1.$$

Itt mindegyik szakasz egy körközéppontnak egy hasonlósági középponttól való távolsága vagy pedig két ilyen távolság különbsége, ennélfogva az arányok kifejezhetők a megfelelő körsugarakkal. Az irányokat is figyelembe véve

$$\frac{AO_2}{O_2O_1}=\frac{AO_2}{AO_1-AO_2}=\frac{r_2}{r_1-r_2},$$
$$\frac{O_1B}{BO_3}=-\frac{BO_1}{BO_3}=-\frac{r_1}{r_3},$$
$$\frac{O_3M}{MA}=\frac{MO_3}{AM}=\frac{AO_3-AM}{AM}=\frac{r_3}{\varrho_a}-1,$$

az A centrumra nézve ugyanis a ϱ_a sugarú kör van a k_3-hoz hasonló helyzetben.

Ezeket beírva

$$\left(\frac{r_2}{r_1-r_2}\right)\cdot\left(-\frac{r_1}{r_3}\right)\cdot\left(\frac{r_3}{\varrho_a}-1\right)=-1,$$

amiből

$$\varrho_a=\frac{r_1r_2r_3}{r_1(r_2+r_3)-r_2r_3}.$$

Ugyanilyen gondolatmenettel számíthatnánk a ϱ_b sugarat, abban azt kellene kihasználnunk, hogy a ϱ_b és r_2 sugarú körök egymás megfelelői a B centrumú homotéciában. Az O_1O_2B háromszögre és az O_3A egyenesre alkalmaznánk Menelaosz tételét. Ez azonban csak a szerepek tükrözése lenne, egymás helyére lépnek O_2 és O_3, tehát r_2 és r_3, másrészt A helyére B, vagyis a $k_1,\ k_2$ körpár centruma helyére a $k_1,\ k_3$ körpár centruma. Mindkét változás azt jelenti, hogy ϱ_b értékét ϱ_a képletéből a 2-es és 3-as indexek fölcserélésével kaphatnánk.

Ámde a képletben r_2 és r_3 – mindhárom előfordulásukban – szimmetrikus szerepet visznek, szorzatuk, ill. összegük szerepel, ennélfogva $\varrho_a=\varrho_b$. Ezzel bebizonyítottuk az állítást és a sugár kívánt kifejezését is megadtuk.

2. Ha $O_1,\ O_2$ és O_3 egy t egyenesen van, akkor előfordulhat, hogy A és B egybeesnek. Ilyen esetben a három kör két közös érintője vinné a feltételben szereplő 4 érintő szerepét; az állítás semmitmondó.

Ha A és B különbözők, ugyancsak t pontjai, akkor az $a_1,\ a_2$ és $b_1,\ b_2$ érintőpárok elemei egymás tükörképei t-re, deltoidot alkotnak, az állítás helyessége nyilvánvaló (2. ábra). A sugár képlete az M körre érvényes.

1985-05-207-1.eps

2. ábra

Megjegyzések. 1. Ha nemcsak a bizonyításban használjuk ki, hogy a közös külső érintők metszéspontja a körpár ***külső hasonlósági pontja***, hanem mindjárt ezt mondjuk a feltételben, akkor az állítást többféle módon is kiterjeszthetjük. Tulajdonképpen egy tételcsalád erősen korlátozott speciális esetével állunk szemben. Érthető ez abból, hogy versenyfeladatról van szó, ilyenkor több okból is szokásos a témát erősebb feltételekkel mintegy „megnyirbálni”, csak az „oroszlánkörmeit” említeni. Egyik ok, hogy a többi feladatra is maradjon idejük a versenyzőknek; egy másik, hogy – akiknek van ráadás-mondanivalójuk – bemutathassák az elemzésben, diszkutálásban való képességeiket, jártasságukat. – Természetesen itt is csak néhány lehetőség felvillantására van hely.

[1] Bizonyítását lásd az F. 2497. feladat megoldásában. KÖMAL, 1985. évi májusi szám, 198. oldal.

1985-05-207-2.eps

3. ábra

Nem használtuk ki, hogy köreink páronként egymáson kívül állnak, pl. hogy $O_1O_2 > r_1 + r_2$, hiszen az állításbeli kör sugarának kifejezésében nem szerepelnek a centrumok közti távolságok. Rögzítve az $r_1,\ r_2,\ r_3$ sugarak hosszát, a körök minden szóba jövő helyzetében ugyanakkora a negyedik kör sugara.

Külső hasonlósági pont akkor is létezik, ha pl. k_2 tartalmazza k_1-et (!); ott futnak össze a párhuzamos és egyirányú sugarak végpontjait összekötő egyenesek, ha $r_1 \neq r_2$. Más fogalmazással az $r_1 = r_2$ esetről is van mondanivaló. De érvényesek hasonló állítások ***belső hasonlósági pontok*** esetében is, vagyis ha párhuzamos és ellentétes irányú sugarak végpontjai révén származtatjuk az $A,\ B$ pontokat.

Ezt viszont hozzá kell tenni a bizonyításhoz: 1. ábránkkal a „legkézenfekvőbb" M pontra szorítkoztunk, az AO_3 és BO_2 szögfelező szakaszok közös pontjára. Kihasználtuk a számításban, hogy $O_2O_1 = AO_1 - AO_2$ és $MO_3 = AO_3 - AM$. Az $a_1,\ a_2$, valamint $b_1,\ b_2$ érintőpárok közti 2-2 szögfelező 4 metszéspontja közül csak erre az egyre érvényes a számítás és az állítás.

A 2. ábrán a szimmetria folytán adódó M^* középű kör sugara már a középpontok helyzetétől is függ.

2. Többen azzal a „kúpos" eljárással bizonyították a feladat ***állítását***, amellyel 3 kör 6 külső és belső hasonlósági pontjáról szokás bizonyítani, hogy alkalmasan véve közülük 3-at, ezek egy egyenesre illeszkednek. A sugár kiszámítása viszont többnyire elmaradt.