Adjuk meg az összes olyan $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ valós számokat, amelyek mellett minden valós x-re

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_k \cos kx + \ldots + a_n \cos nx = 0. \tag{1}$$

I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $\cos\, kx$ előállítható $\cos\, x$ (legfeljebb) k-adfokú polinomjaként. Teljes indukcióval bizonyítunk. $k=1$-re az állítás nyilvánvaló, $k=2$-re következik a $\cos\, 2x = 2\cos\,^2 x - 1$ összefüggésből. Tegyük fel, hogy $\cos\, kx$ minden $k<m$ értékre előáll, $\cos\, x$ legfeljebb k-adfokú polinomjaként. Ekkor a

$$2\cos\,(m-1)x \cos\, x = \cos\,(m-2)x + \cos\, mx$$

azonosság alapján $\cos\, mx = 2\cos\,(m-1)x\cos\, x - \cos\,(m-2)x$. Itt feltevésünk szerint $\cos\,(m-1)x$ legfeljebb $(m-1)$-edfokú, $\cos\,(m-2)x$ pedig legfeljebb $(m-1)$-edfokú polinomja $\cos\, x$-nek, tehát a jobb oldal (legfeljebb) m-edfokú polinomja $\cos\, x$-nek. Ezzel beláttuk, hogy $\cos\, mx$ is (legföljebb) m-edfokú polinomja $\cos\, x$-nek.

Ebből azonban következik, hogy $a_1\cos\, x + a_2\cos\, 2x + \ldots + a_{n-1}\cos\,(n-1)x$ előállítható $\cos\, x$ legföljebb $(n-1)$-edfokú polinomjaként. Van tehát olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú $p(y)$ polinom, amelyre

$$p(\cos\, x) = a_1\cos\, x + a_2\cos\, 2x\ \ldots\ + a_{n-1}\cos\,(n-1)x$$

minden x-re. Ha minden x-re teljesül (1), akkor

$$p(\cos\, x) = -a_n \cos\, nx \tag{2}$$

minden x-re.

Legyen most

$$x_1 = \frac{\pi}{2n}, \ldots, x_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \ldots, x_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Minden ilyen x_j-re

$$\cos\, nx_j = \cos\, \frac{(2j-1)\pi}{2} = 0,$$

és az $y_1 = \cos\, x_1$, …, $y_j = \cos\, x_j$, …, $y_n = \cos\, x_n$ értékek páronként különbözőek. Ekkor (1) és (2) szerint

$$p(y_j) = p(\cos\, x_j) = -a_n\cos\, nx_j = 0,$$

vagyis y_1, …, y_j, …, y_n a $p(y)$ polinom n darab különböző gyöke. De a p polinom legföljebb $(n-1)$-edfokú, tehát csak úgy lehet n különböző gyöke, ha azonosan nulla. Azt kaptuk, hogy

$$0 \equiv p(\cos\, x) \equiv -a_n\cos\, nx,$$

amiből $a_n = 0$ következik, hiszen $\cos\, nx$ nem azonosan nulla.

A gondolat $(n-1)$-szeri megismétlésével rendre kapjuk, hogy $a_{n-1}=0$, $a_{n-2}=0$, …, $a_1=0$. Az $a_1\cos\, x + a_2\cos\, 2x + \ldots + a_n\cos\, nx = f(x)$ függvény tehát csak $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ esetén lehet azonosan nulla, ekkor viszont valóban az.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy ha valamely $a_k \neq 0$, akkor az $f(x) = a_1\cos\, x + a_2\cos\, 2x + \ldots + a_n\cos\, nx$ függvény nem lehet azonosan nulla. Szorozzuk meg e célból az $f(x)$ függvényt $\cos\, kx$-szel és integráljuk a szorzatot x szerint nullától 2π-ig. Az $f(x)\cos\, kx$ l-edik tagjának integrálja, ha $l \neq k$:

$$a_l \int_0^{2\pi} \cos\, lx\ \cos\, kx\ dx = \frac{1}{2}a_l \int_0^{2\pi} (\cos\,(k+l)x + \cos\,(k-l)x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}al\left[\frac{\sin(k+l)x}{k+l} + \frac{\sin(k-l)x}{k-l}\right]_0^{2\pi}.$$

A k-adik tag integrálja

$$a_k\int_0^{2\pi}\cos^2\ kx\ dx = \frac{1}{2}a_k\int_0^{2\pi}(\cos\, 2kx + 1)dx =$$
$$= \frac{1}{2}a_k\left[\frac{\sin\, 2kx}{2k} + x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}a_k\cdot 2\pi = a_k\pi \neq 0,$$

tehát

$$\int_0^{2\pi} f(x)\ \cos\, kx\ dx = a_k\pi \neq 0,$$

ami nem állhatna fenn, ha $f(x)$, s ezért $f(x)\cos kx$ is minden x-re nulla volna. Ezzel beláttuk, hogy ha valamely a_k nem nulla, akkor $f(x)$ nem azonosan nulla. Eszerint $a_1\cos x+a_2\cos 2_x+\ldots+a_k\cos nx$ csak akkor lehet nulla minden x-re, ha $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$. Ebben az esetben viszont valóban minden x-re nulla a szóban forgó kifejezés.

Helyei Judit (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az első megoldásban felhasznált állítást lényegében a következő formában láttuk be: cos kx a cos x-nek pontosan k-adfokú polinomja. Ha most minden x-re $a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx=0$, akkor $a_1\cos x+\ldots+a_{n-1}\cos(n-1)x\equiv -a_n\cos nx$. Itt a bal oldal legfeljebb $n-1$-edfokú, a jobb oldal viszont $a_1\neq 0$ esetén n-edfokú polinomja cos x-nek, ami nem lehet, mivel cos x végtelen sok különböző értéket vesz fel. Ebből következik, hogy $a_n=0$.