I. megoldás. Legyenek az n szám pozitív osztói $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$. Ha $n > 1$, akkor $k \geqq 2$, így az osztók között vannak különbözők. Tekintsük most az $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \ldots > \frac{n}{d_k}$ számokat. d_i pontosan akkor osztója n-nek, ha $\frac{n}{d_i}$ is osztója n-nek, vagyis ez a k darab szám is az n osztóinak felsorolása, csak fordított sorrendben.

Jelöljük A-val n osztóinak a számtani közepét. Ekkor

$$A = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{k} = \frac{\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_k}}{k} = \\ = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k + \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_k}}{2k}.$$

Tehát A a d_1, d_2, …, d_k, $\frac{n}{d_1}$, $\frac{n}{d_2}$, …, $\frac{n}{d_k}$ számok számtani közepe is. E számok mértani közepe

$$G = \sqrt[2k]{d_1 d_2 \ldots d_k, \frac{n}{d_1}\frac{n}{d_2}\ldots\frac{n}{d_k}} = \sqrt[2k]{n^k} = \sqrt{n.}$$

A számok között vannak különbözők, így $A > G = \sqrt{n}$, azaz a feladat állítása igaz.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseivel $d_1 = 1$, ezért

$$d_1 + \frac{n}{d_1} = 1 + n > 2\sqrt{n}, \tag{1}$$

ami $(\sqrt{n} - 1)^2 > 0$ miatt igaz. Minden más d_i-re ($i = 2, 3, \ldots, k$-ra)

$$d_i + \frac{n}{d_i} \geqq 2\sqrt{n}, \tag{2}$$

ami $\left(\sqrt{d_i} - \sqrt{\frac{n}{d_i}}\right)^2 \geqq 0$ miatt igaz. Ha most (1)-et és (2)-t $i = 2, 3, \ldots, k$-ra összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$d_1 + \frac{n}{d_1} + d_2 + \frac{n}{d_2} + \ldots + d_k + \frac{n}{d_k} > 2k\sqrt{n}. \tag{3}$$

Itt a bal oldal $\frac{n}{d_1} = d_k$, $\frac{n}{d_2} = d_{k-1}$, …, $\frac{n}{d_k} = d_1$ miatt $2(d_1 + d_2 + \ldots + d_k)$-val egyenlő. Ezért (3)-ból

$$A = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{k} > \sqrt{n}$$

következik, ami éppen a feladat állítása.